



Documento de Trabajo

INVESTIGACION-ACCION:

RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS POR PARTE DE ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA BASICA DE ESCUELAS MUNICIPALIZADAS UTILIZANDO DIVERSAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

Departamento de Educación

- Julio de 2013-

Estas investigaciones se realizaron en el Departamento de Educación de la Universidad Central, con el apoyo financiero de la institución Unasur, Consejo Suramericano de Educación (CSE).

El trabajo se llevo a cabo con la colaboración de un equipo de 45 profesores de la asignatura de matemáticas que imparten educación a estudiantes de enseñanza básica en los establecimientos de educación municipalizada en diferentes comunas de las regiones metropolitana, Valparaíso, Concepción, Atacama, Libertador Bernardo O'Higgins, y Los Lagos por un periodo de cinco meses y medio durante el año 2013.

El estudio comprometió la participación de sociólogos que trabajaron en la confección de los instrumentos, su confiabilidad y su análisis estadístico y psicopedagogos y profesores que se ocuparon de la selección de los contenidos de las pruebas de matemáticas, y posterior corrección. Además colaboraron en esta investigación-acción, un gran numero de encuestadores (estudiantes de educación) que aplicaron los cuestionarios en las diferentes aulas.

La coordinadora del estudio, psicóloga Cristina Sierra agradece a todos los colaboradores, su participación en esta investigación.

INVESTIGACION-ACCION:

RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS

POR PARTE DE ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA BASICA

DE ESCUELAS MUNICIPALIZADAS UTILIZANDO DIVERSAS

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

PREFACIO

En esta investigación, en que los actores son los estudiantes de cuarto a sexto año básico de escuelas municipales del país, se han diseñado tres instancias de pruebas que se aplican a los alumnos de estos establecimientos. Por una parte, mediante un modelo construccionista, se evalúan las estrategias que emplean los estudiantes para solucionar problemas propios del currículo, sin habérseles instruido respecto a las estrategias específicas que pueden habilitar una mayor competencia en el manejo de la resolución de problemas. Luego a un grupo menor de estudiantes, de la comuna de Copiapó, y matriculados en una de las escuelas a la que asisten los alumnos que presentan mayores problemas en conducta y en rendimiento escolar tanto en matemáticas, lenguaje y ciencias naturales y sociales, se les instruye a estos alumnos de sexto año básico, en sucesivas sesiones sobre el uso de estrategias metacognitivas para solucionar problemas de matemática y lo mismo se hace con los profesores de modo que éstos acompañen a los alumnos en los procesos que se requiere aplicar para enseñar matemáticas. En tercer lugar, Los mismos alumnos son sometidos a una instrucción de manejo de TIC para trabajar de modo colaborativo en la resolución de problemas.

De acuerdo con lo anterior entonces, a continuación se presenta la primera parte de esta investigación realizada en los meses de marzo-abril del 2013 con el tema de identificar las estrategias generales usadas por los estudiantes de 4to a sexto año básico, analizado a partir de un enfoque construccionista. Se continua con el tema de determinar las estrategias metacognitivas que emplean los estudiantes de sexto año básico de la comuna de Copiapó en la resolución de problemas de matemática, esto considerado desde la perspectiva de un modelo construccionista y de trabajo colaborativo de los estudiantes, sujetos que fueron sometidos a una instrucción previa en el uso de estrategias de aprendizaje. Por ultimo se presenta un trabajo de investigación-acción en que el mismo grupo de alumnado sometidos a la instrucción de estrategias metacognitivas, es evaluado en su actitud hacia las matemáticas y rendimiento académico a partir del uso de las TICs bajo un modelo colaborativo con sus pares, bajo un enfoque constructivista.

PRIMERA PARTE

RESOLUCION DE PROBLEMA MATEMATICOS DEL ALUMNADO DE ENSEÑANZA BASICA CON EL USO DE REPRESENTACIONES Y DIVERSOS METODOS

INDICE

Pág.

1. Introducción.....	5
2. Perspectiva constructivista de la enseñanza de las matemáticas.....	5
3. La resolución de problemas matemáticos.....	6
4. Objetivos.....	10
5. Metodología.....	10
5.1.Enfoque.....	10
5.2. Marco analítico.....	11
5.3.Muestra.....	12
5.4.Instrumentos.....	13
6. Resultados.....	15
6.1. Conocimientos previos.....	17
6.2. Comprensión del problema.....	21
6.3. Concepción de un plan.....	29
6.4. Ejecución del plan (heurística-estrategias).....	36
6.5. Estrategias reflexivas.....	37
6.6. Estrategias irreflexivas.....	45
6.7. Verificación del resultado.....	50
6.8. Impacto de las diferentes variables en la solución del problema.....	55
7. Conclusiones.....	57

1. INTRODUCCIÓN

La educación matemática plantea nuevas necesidades para este siglo; poniendo el acento en el desarrollo de ciertas competencias por parte de los alumnos.

La calidad de un programa de formación viene dado entonces, tanto por la relevancia de las competencias que se propone y su eficacia responde al modo en que éstas se logran.

El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE (1) pone el acento en lo que el alumno sea capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, mas que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.

Aceptar estos retos supone un cambio conceptual en la organización de las enseñanzas obligatorias para adaptarse a los modelos de formación mas centrados en el aprendizaje, es decir, en los estudiantes y en su trabajo, y que les permitan “aprender a aprender”.

Considerando el currículum que rige para los estudiantes de enseñanza básica de los niveles 4to a 6to básico, se recoge los resultados de un estudio sobre el método y las estrategias utilizadas por estos alumnos de escuelas municipalizadas en cuanto a su manejo en la resolución de problemas matemáticos, lo cual tuvo como finalidad comprender mejor los factores que intervienen en la resolución de problemas.

La fase que estamos reportando parte de considerar que la calificación obtenida en una prueba, brinda una información limitada sobre el desempeño del estudiante, en tanto que profundizar en sus estrategias de resolución, nos permite acercarnos a sus procesos de aprendizaje.

Esta investigación considera de vital importancia un acercamiento más profundo a las respuestas de los alumnos. Nos preguntamos por qué los alumnos fallan al resolver cierto tipo de problemas y en otros no y cuáles son los factores que entran en juego. También reflexionamos sobre los tipos de problemas y sus incógnitas y sobre la manera como los estudiantes las entienden, dado que mientras los alumnos resolvían la prueba, se observaron diferentes factores que pueden favorecer u obstaculizar el proceso de resolución, por ejemplo el hecho de que algunas preguntas no eran cabalmente comprendidas.

Con este acercamiento pretendemos dar un paso adelante en el proceso evaluativo, más allá de la simple asignación de calificaciones, ya que, al prestar atención a las estrategias de resolución de los alumnos, así como a sus errores, buscamos elementos para entender por qué hay alumnos que resuelven bien los problemas y hay otros que fallan en los mismos problemas, a fin de aportar información útil en el diseño de apoyos pedagógicos que estimulen un mejor desempeño.

El mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un problema central para este sistema educativo y por ello la búsqueda de alternativas dirigidas a sacar adelante esta tarea cobra relevancia. El presente proyecto pretende responder a esa necesidad.

2. PERSPECTIVA CONSTRUCTIVISTA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Adentrarnos en los fundamentos epistemológicos del constructivismo implica partir de que el conocimiento se construye activamente por los sujetos y no es algo que existe fuera de sus cuerpos a quienes se les puede transmitir el cúmulo de saberes de manera lineal y automática (Novack, 1998; Larios, 2000; Castillo, 2008). O como sostiene Sánchez (2004, p.77) “el conocimiento no puede ser transferido desde la cabeza de un profesor a la cabeza de los estudiantes”. Por el contrario, el constructivismo intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conceptos y cómo sus estructuras conceptuales le llevan a convertirse en las gafas perceptivas que guían sus aprendizajes (Novack, 1988, p.219). Carretero (1997) precisa que, desde la epistemología constructivista, el individuo no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus

disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una *construcción* del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea (ibídem, p. 21)

Aunque existen distintas corrientes dentro de este paradigma, coinciden en el postulado central que destaca la importancia de los conocimientos previos como sustrato para el nuevo conocimiento y, por tanto, para el aprendizaje. Es decir, el sujeto construye los conocimientos en función de sus experiencias previas, creencias o ideas que en su conjunto conforman lo que Novack denomina “estructuras conceptuales”.

En esa misma línea, Driver afirma que “lo que hay en el cerebro del que va a aprender tiene importancia” (1986, p.10), con lo que sugiere que todos construimos representaciones del saber y las utilizamos para interpretar las experiencias nuevas. De esta afirmación se desprende que los resultados del aprendizaje dependen de los conocimientos previos de los estudiantes, así como de sus concepciones y motivaciones.

Además del papel activo del sujeto cognoscente, Kilpatrick destaca otro factor clave respecto del constructivismo: “llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo experiencial de uno, no se descubre un independiente y preexistente mundo fuera de la mente del conocedor” (citado en Larios, 2000, p.2). Sin embargo Larios precisa que el mundo existe independientemente del cognoscente; sólo que para el interés de este ser, sólo existirá el mundo cuando lo conozca. De ahí la importancia de un sujeto activo que construye conocimientos y con ellos organiza el mundo.

Estas dos características centrales del constructivismo –cognoscente activo e importancia de conocimientos previos- son sintetizadas de manera muy clara por Driver (1986) al afirmar que “quien aprende construye activamente significados”. Para este autor, interpretamos nuevas experiencias mediante analogías, a partir de las estructuras de conocimientos que ya poseemos lo que a su vez puede modificar dichas estructuras (ídem, p.10).

Estos postulados constructivistas son aplicables a cualquier área del saber y las matemáticas es una de ellas. En tal sentido, Kilpatrick, Gómez y Rico (citados en Larios, 2000, p. 3) precisan que:

- Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación en las estructuras existentes.

En el caso de las matemáticas una experiencia que favorece la construcción de conocimientos a partir de procesos de abstracción reflexiva es la resolución de problemas. A tal efecto, Larios (2000) afirma que: “Tal parece que para que el alumno pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la obligatoria interacción activa con los objetos matemáticos, incluyendo la reflexión que le permite abstraer estos objetos, es necesario que estos objetos se presenten inmersos en un problema y no en un ejercicio. De hecho son estas situaciones problemáticas las que introducen un desequilibrio en las estructuras mentales del alumno, que en su afán de equilibrarlas (un acomodamiento) se produce la construcción del conocimiento” (2000, p.5).

En fin, la resolución de problemas es una experiencia didáctica que favorece el enriquecimiento de las estructuras conceptuales, ya que demanda conocimientos previos –nociones, conceptos, experiencias- y genera conflictos cognitivos que movilizan al estudiante a buscar una respuesta que permita equilibrar la situación problemática planteada.

3. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

De acuerdo con los recientes aportes de modelos epistemológicos constructivistas, la resolución de problemas constituye una actividad privilegiada para introducir a los estudiantes en las formas propias del quehacer de las matemáticas. Lograr que los alumnos desarrollen estructuras de pensamiento que le permitan matematizar; es una de las principales metas de la enseñanza matemática actual. Según Alsina (2007, p.91) esta actividad -central en el campo que nos ocupa- remite a trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, fundamentalmente en dos direcciones: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas, y trabajando entonces matemáticamente, hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado.

En apoyo a estas ideas, De Guzmán (2007) sostiene que la resolución de problemas tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tal experiencia debe permitir al alumno manipular objetos matemáticos, activar su capacidad mental, ejercitar su creatividad y reflexionar sobre su propio aprendizaje (metacognición) al tiempo que se prepara para otros problemas con lo que adquiere confianza en sí mismo.

Si bien las ventajas didácticas de este método parecen evidentes, es importante aclarar su sentido ya que la resolución de problemas tiene múltiples usos e interpretaciones que pueden llegar a ser contradictorias. Vilanova *et al* (2001) descubre por lo menos tres aproximaciones:

- a. La resolución como contexto: donde los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, como una justificación para enseñar, motivar o desarrollar actividades. Ello implica una interpretación y aplicación mínima.
- b. Resolver problemas para el desarrollo de habilidades: propuesta que invita a la resolución de problemas no rutinarios, para el logro de una habilidad de nivel superior, adquirido luego de haber resuelto problemas rutinarios. En fin, las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas.
- c. Resolver problemas como sinónimo de "hacer matemática", la estrategia asume que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en visualizar problemas y soluciones.

Esta última aplicación es la que reúne los requisitos idóneos, se trata pues de hacer matemática en estricto sentido. Esta idea también es sostenida por Alsina (2007) quien hace una revisión del manejo de situaciones problemáticas que se manejan en las escuelas y observa que es común que los profesores trabajen con matemáticas exponiendo el contenido, dando ejemplos sencillos, después haciendo ejercicios sencillos y luego complicados, para que al final, se presente un problema.

Por el contrario, actualmente se recomienda plantear situaciones problemáticas desde el principio, para activar el interés y la mente del estudiante. Esta posición coincide con la tercera situación descrita por Vilanova (2001), es decir la resolución de problemas como sinónimo de hacer matemáticas. Y, es preciso tener presente que para matematizar es necesario trabajar a partir de la realidad para dar significado a las situaciones, apoyados desde los conceptos, esquemas y relaciones matemáticas.

Para clarificar este punto, vale la pena retomar la diferencia que establece Larios (2000) entre un problema y un ejercicio. Para este autor un *problema* es una situación (real o hipotética) que resulta plausible al alumno desde su punto de vista experiencial y que involucra conceptos, objetos u operaciones matemáticas, mientras que un *ejercicio* se refiere a operaciones con símbolos matemáticos únicamente (sumas, multiplicaciones, resolución de ecuaciones, etcétera). En síntesis, un ejercicio se resuelve a través de

procedimientos rutinarios que conducen a la respuesta, el problema exige el desarrollo de una estrategia para resolver la incógnita.

Polya, a través del libro "How to solve it", introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas. La heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso (Polya, 1965, p. 102). Agrega que la heurística tiende a la generalidad, al estudio de los métodos, independientemente de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo. Podemos entender la heurística o las heurísticas como las acciones que pueden resultar de utilidad para resolver problemas. En este sentido, recomendaba, por ejemplo, hacer dibujos para ilustrar los datos, condiciones y relaciones de la situación problemática. Según Polya (1965), para resolver un problema se necesita:

- a. Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones?;
- b. Concebir un plan: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos?;
- c. Ejecución del plan: comprobar cada uno de los pasos, ¿puede usted ver que el paso es correcto?;
- d. Visión retrospectiva: verificar el resultado.

Con el fin de profundizar y aclarar las ventajas que ofrece el método propuesto por Polya conviene tomar en cuenta el señalamiento que hace Schoenfeld acerca de que las heurísticas, tal como las propone el referido autor, pueden ser muy generales y que prácticamente cada problema podría requerir ciertas heurísticas específicas (Barrantes, 2006). Schoenfeld (citado en Barrantes 2006 y Vilanova et al, 2001) además de las heurísticas, propone tomar en cuenta otros factores tales como:

1. Recursos: son los conocimientos previos que posee la persona, se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentar un problema. Un elemento clave a tener presente es el de ver si el estudiante tiene ciertos estereotipos o recursos defectuosos o mal aprendidos.
2. Control: que el alumno controle su proceso entendiendo de qué trata el problema, considere varias formas de solución, seleccione una específica, monitoree su proceso para verificar su utilidad y revise que sea la estrategia adecuada.
3. Sistema de creencias: las creencias van a afectar la forma en la que el alumno se enfrenta a un problema matemático.

Schoenfeld descubre la existencia de una serie de creencias sobre la matemática que tienen los estudiantes y que pueden interferir en los procesos de resolución, entre ellas las que siguen:

- Los problemas matemáticos tienen una y sólo una respuesta correcta.
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en la clase.
- Los estudiantes corrientes no pueden esperar entender matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente. Creencia que puede estar muy difundida.
- La matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento, no hay nada de trabajo en grupo.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tiene poco o nada que ver con el mundo real (Barrantes, 2006).

Por último, Santos Trigo (1996, citado en Valle, Juárez y Guzmán, 2007) realiza una buena síntesis de varios de los factores revisados, la cual resulta pertinente para un trabajo empírico de análisis de estrategias. Este autor toma en cuenta:

- La importancia de ideas conocidas, conocimientos de conceptos, de hechos específicos, el “saber qué hacer”.
- El repertorio de estrategias generales y específicas que son capaces de poner en marcha al sujeto en el camino de la resolución de problemas concretos, el “¿cómo hacerlo?”
- El papel del monitoreo o auto-evaluación del procedimiento utilizado al resolver un problema. ¿Es correcto lo que hice?, ¿existe otra vía?
- La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema (Valle *et al*, 2007, p.3).

Al analizar el desempeño de los alumnos será preciso tomar en cuenta –en mayor o menor medida- esta serie de factores para entender cómo perciben las situaciones matemáticas y para conocer el tipo de argumentación matemática que utilizan. Así se puede pensar en dar alternativas de solución o de respuesta.

Esta breve revisión nos permite confirmar que esta estrategia cuando es cuidadosamente concebida y planeada ofrece un ámbito fructífero para adentrar a los estudiantes en los procesos de pensamiento matemático.

Dado nuestro interés por conocer el impacto de los conocimientos previos en la resolución de problemas, recuperamos una investigación realizada en España, entre jóvenes de bachillerato que cursan la asignatura física y química. Solaz-Portolés y Sanjosé, (2006) examinan la contribución de tres variables a la resolución de problemas: conocimiento previo, estrategias de estudio y conocimiento conceptual. La primera refiere al conocimiento previo sobre la materia del problema, la segunda aborda el procesamiento más profundo de la información presentada -estructuración, integración, organización y selección de los contenidos-, mientras que la última implica la existencia de más cantidad de conceptos y relaciones entre ellos en la memoria a largo plazo.

Sus conclusiones indican que conocimiento previo estrategias de estudio y conocimiento conceptual son predictores estadísticamente significativos del rendimiento en la resolución de problemas. De éstos, el conocimiento conceptual puede tener una mayor influencia que las estrategias de estudio, sobre la resolución de problemas, y a su vez éstas mayor influencia que el conocimiento previo (Ibidem, p. 703). En síntesis, esta investigación destaca el relevante papel del conocimiento conceptual - cantidad de conceptos y estructuras preposicionales- en la resolución de problemas. De esta manera estos investigadores encuentran coincidencia con otros autores que han mostrado que: a) los esquemas de conocimiento instalados en la memoria a largo plazo de los sujetos expertos están mejor organizados y estructurados, y contienen más conceptos y; b) que el dominio de los conceptos es una condición *sine qua non* para poder aplicarlos correctamente en la resolución de problemas.

En una segunda fase de esta investigación, Solaz-Portolés y Sanjosé (2008) analizaron la importancia de los conocimientos previos y modelos mentales para la resolución de problemas. Pusieron a prueba la teoría de modelos mentales propuesta por Johnson-Laird que “se basa en el supuesto de que la mente construye modelos internos del mundo externo y que usa estos modelos para razonar y tomar decisiones” (p. 2). Para ello, trabajaron con estudiantes que poseían diferentes niveles de conocimientos previos, quienes debían resolver un problema después de la lectura de un texto. Una de sus hipótesis fue que los alumnos con un mayor nivel de conocimiento previo tendrían más facilidad para resolver problemas, dado que, dispondrían del conocimiento o esquema pertinente para confeccionar y ejecutar los modelos mentales adecuados en el proceso cognitivo.

Otros estudios sobre esta problemática, centran la atención en la importancia de recuperar las estrategias diseñadas por los propios alumnos como una manera de favorecer su aprendizaje. En este sentido, Pérez (2008) ofrece un acercamiento al tema al analizar diferentes formas de representación en la resolución de problemas de estudiantes de secundaria. Tales representaciones son *icónicas* (dibujos), *aritméticas*, *exploratorias* y *algebraicas*. Este autor advierte que muchos maestros suelen menospreciar las representaciones icónicas y aritméticas por considerarlas inferiores para un niño de secundaria, sin

embargo, considera “muy importante aprender a reconocer alternativas de trabajo por parte de los alumnos y aprovechar las características de las diferentes representaciones (y estrategias) que utilizan los alumnos para resolver los problemas y en lugar de desecharlas por no ser algebraicas usarlas como puentes que permitan dar significado a los procesos realizados” (Pérez, 2008, p. 32).

En concordancia con esta postura, otros autores consideran que el elemento clave para la resolución de problemas es la libertad que se les otorga a los alumnos no sólo de reflexionar en la relación de los datos en un problema, sino también en el método de resolución (Escareño, 2005). “Si a los alumnos se les da la oportunidad de que utilicen procedimientos inventados por ellos mismos, se propicia que el trabajo escolar se realice en un nivel de abstracción tal que los alumnos pueden desempeñarse con eficacia. Paralelamente, se propicia el surgimiento de múltiples formas de obtener una misma respuesta, con lo que se cumple con una meta importante del enfoque de resolución de problemas” (p. 77).

En este marco, para este autor son fundamentales las oportunidades que se brindan a los alumnos para utilizar y desarrollar diferentes tipos de representaciones. “Estas representaciones sirven de soporte visual a la reflexión sobre la resolución de problemas y ayudan a comunicar los resultados de la reflexión. Las buenas representaciones cumplen una doble función: son herramientas del pensamiento e instrumentos de comunicación (NCTM, 2000, citado en Escareño, 2005, p. 94)

García (2005) señala que las evaluaciones externas pueden llegar a ser un obstáculo para el enfoque de resolución de problemas, si éstas no dan cabida a todos los aspectos de dicho enfoque y lo único que evalúan son respuestas correctas. De esto también se deriva que algunos maestros y padres de familia piensen que siguiendo una educación tradicional los alumnos tienen más probabilidades de aprobar dichos exámenes y ofrezcan menor apoyo al enfoque constructivista o de resolución de problemas.

4. OBJETIVOS

1. Analizar las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver problemas matemáticos.
2. Detectar errores y dificultades en el método y las estrategias que emplean los alumnos para resolver problemas matemáticos.
3. Comparar las estrategias de los alumnos que resuelven exitosamente los problemas matemáticos con aquéllos que no lo hacen.
4. Ponderar la pertinencia de una prueba, para evaluar el desempeño de los alumnos en torno a habilidades matemáticas.
5. Establecer recomendaciones didácticas y pedagógicas acerca del uso y fortalecimiento de las mejores estrategias utilizadas por los alumnos.

5. DISEÑO METODOLÓGICO

5.1. Enfoque

Se utilizó un diseño mixto. Por un lado, recurrimos al enfoque cualitativo, a través de la entrevista, que permitió una aproximación a los métodos de resolución que utilizan los niños, en sus propias palabras, tarea que difícilmente un profesor puede realizar a cada uno de los estudiantes, después de haber aplicado un examen y que ayuda a saber realmente cómo se enfrentan los estudiantes a una tarea de esta naturaleza. Por su parte, el enfoque cuantitativo facilitó conocer y comparar con mayor precisión los diferentes recursos y estrategias que utilizan los alumnos para resolver un problema. Dicho enfoque permitió compaginar la información obtenida de las entrevistas cualitativas y proporcionar un análisis más completo, al permitir cruzar la información recuperada de los alumnos, por variables y por problemas.

5.2. Marco analítico

El marco analítico de este estudio retoma el modelo de heurísticas de Polya (1954) sobre la resolución de problemas. En tal sentido recupera las cuatro fases contempladas en el método probado por este autor a saber: comprensión del problema, concebir un plan, ejecución del plan (heurísticas) y visión retrospectiva.

Complementariamente, recurrimos a la propuesta de Schoenfeld (1985) sobre la importancia de analizar los recursos de los estudiantes al momento de resolver problemas matemáticos, también contemplados por otros autores. Esta categoría se focalizó en los conocimientos previos, debido a la importancia que reviste este recurso en el paradigma constructivista del aprendizaje. De ahí que nuestro esquema de análisis de la resolución de problemas quedó estructurado de la siguiente manera:

1. Conocimientos previos (como principal recurso)
2. Comprensión del problema
3. Concepción del plan
4. Ejecución del plan (heurísticas)
5. Verificación del resultado (visión retrospectiva)

Dado que una de las principales críticas al esquema propuesto por Polya es que es muy general, en este estudio se retoman los aporte de Rizo y Campistrous (1999) para clasificar las heurísticas de los alumnos en reflexivas e irreflexivas y se retoma en parte la clasificación de Arteaga y Guzmán (2005) sobre heurísticas para ampliar el panorama y no perder la riqueza de las respuestas de los alumnos. Las categorías de análisis quedaron conformadas como se muestra a continuación:

Tabla 1. CATEGORÍAS PARA ANALIZAR LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Conocimientos previos

- 1.1. Suficientes.
- 1.2. Insuficientes.

2. Comprensión del problema

- 2.1. Comprende el planteamiento del problema
- 2.2. Comprende parcialmente el problema
 - 2.2.1. Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar.
 - 2.2.2. Entiende la pregunta, pero no comprende los conceptos y no sabe qué operaciones utilizar.
 - 2.2.3. Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la pregunta.
- 2.3. No comprende el planteamiento del problema

3. Concepción de un plan

- 3.1. Describe o recrea el plan
 - 3.1.1. Puede describir el procedimiento que utilizó.
 - 3.1.2. No puede describir el procedimiento que utilizó.
- 3.2. Justifica el plan
 - 3.2.1. Puede explicar para qué lo hace.
 - 3.2.2. No puede justificar el sentido de sus acciones.
- 3.3. Concibe un plan creativo
 - 3.3.1. Establece un plan creativo.
 - 3.3.2. No establece algún plan.

4. Ejecución del plan: Heurística (estrategias reflexivas e irreflexivas)

- 4.1. Estrategias Reflexivas
 - 4.1.1. Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.
 - 4.1.2. Propone un número y su comprobación para encontrar la solución. Tanteo.
 - 4.1.3. Diseña un dibujo o esquema para encontrar la solución. Conteo directo previa modelación.
 - 4.1.4. Razonamiento directo: procesamiento inductivo que se apoya en el uso del cálculo mental.
 - 4.1.5. Ordena los datos y los tiene presentes en la resolución. No borra los datos.

4.2. Estrategias Irreflexivas

4.2.1. Adivina la operación o fórmula y realiza operaciones mecánicamente.

4.2.2. Busca palabras claves pero no logra comprender el significado del texto (p. e. "todos juntos" significa "sumar").

4.2.3. Contesta "cualquier cosa", sin hacer alguna operación, sobre todo en casos de opción múltiple.

4.2.4. Borra las operaciones que realiza.

4.2.5. Selecciona la opción más cercana al resultado obtenido.

5. Verificación del resultado

5.1.1. Verifica el proceso realizado e identifica el error.

5.1.2. No verifica el proceso realizado.

5.3. Muestra

Para diseñar la muestra se consideró a los alumnos de 4º 6º de primaria de 60 escuelas municipalizadas correspondientes a las ciudades de Santiago, Valparaíso, Concepción, Coquimbo y Rancagua. Se seleccionaron las escuelas municipalizadas con alumnos prioritarios que conforman los grupos sociales mas vulnerables y las escuelas que de acuerdo con las categorías del Ministerio de Educación de Chile, se clasifican como autónomos (alumnos con desempeño alto), emergentes (alumnos con desempeño medio o medio bajo) y en recuperación (alumnos con desempeño deficiente). El criterio de selección se basó en el puntaje de calificación (los más altos y los más bajos) obtenidos en las prueba de resolución de problemas matemáticos aplicadas en el mes de marzo de 2013, con la intención de comparar las estrategias que emplean para resolver problemas y extraer aciertos y desaciertos de las mismas. La muestra quedó conformada por 3608 estudiantes, de la siguiente manera:

Tabla Nº2. Muestra de alumnos por escuela /región

Región	Nº escuelas	Nº alumnos rendimiento alto(autónomos)	Nº alumnos rendimiento bajo (emergentes y en recuperación)
Metropolitana: Santiago	95 esc. Zonas urbanas	285	280
	44 esc. Zonas rurales	132	132
Valparaíso: Valparaíso y Viña del Mar	60 escuelas zonas urbanas	180	120
	52 escuelas zonas rurales	156	156
Del Bio-Bio: Concepción	53 escuelas zonas urbanas	159	159
	48 escuelas zonas rurales	192	144
De Atacama: Copiapo	47 escuelas urbanas	141	141
	32 escuelas rurales	96	96
Libertador Bernarndo O'Higgins: Rancagua	55 escuelas urbanas	165	112
	43 escuelas rurales	129	129
Los Lagos: Puerto Montt	46 escuelas urbanas	138	138
	38 escuelas rurales	114	114
Total	613 escuelas	1.887	1.721

5.4. Instrumentos

Para este estudio se utilizaron dos instrumentos:

i. **Prueba de resolución de problemas matemáticos**

A los estudiantes de enseñanza básica de cuarto, quinto y sexto año, se les aplicó el programa de estudios de matemáticas dispuesto por el Mineduc según decreto N°2960/2012.. Las pruebas que se le aplicaron a estos estudiantes en marzo del 2013, fue a quienes en este mismo año estaban cursando los siguientes niveles: a los alumnos de 5to. básico, se le aplicaron las pruebas de 4to. año básico, a los alumnos que estaban cursando el 6to. año básico se les aplicó la prueba de 5to. año básico y a los alumnos que estaban cursando el 7to año básico, se les aplicó la prueba de 6to. año básico. Con las Pruebas se pretendió evaluar competencias en matemáticas y la evaluación se realiza considerando los niveles de aprendizaje adecuado, según los estándares (nivel de aprendizaje adecuado, nivel de aprendizaje elemental y nivel de aprendizaje insuficiente).

En el cuarto año básico en la asignatura de Matemática, se incluye las habilidades de numeración; cálculo (incluye suma, resta y multiplicación); y en base a ello, se plantea la resolución de problemas con sumas, resta y multiplicación. Se aplican en total 10 problemas.

En el quinto año básico en la asignatura de Matemáticas se incluye las habilidades de: numeración incluyendo fracciones; cálculo incluyendo las 4 operaciones básicas; y en base a esto, se deben resolver los problemas que incluyen suma y resta. Se aplican en total 12 problemas.

En el sexto año básico en la asignatura de Matemáticas., se incluye las siguientes habilidades: numeración con incorporando fracciones y descomposición de cifras de mas 10 dígitos; calculo incorporando operaciones con fracciones y divisiones con gráficos; y resolución de problemas relacionadas con medidas métricas, tiempo, etc. y utilización de división y multiplicación. En base a ello, se plantean los problemas que en total suman 14.

Para recuperar la información sobre el proceso y las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de problemas, se seleccionaron 5 preguntas de dicha prueba, que abordan 5 ejes temáticos: números, sus relaciones y sus operaciones, procesos de cambio, medición, geometría y tratamiento de la información.

Tabla N°3.. Problemas seleccionados

Nº de casos	Nivel formación	Eje temático	Tema	Nivel de dificultad	Tipo de prueba
6	4to. básico	Números, sus relaciones y operaciones	Suma, resta, división simples	Medio	Del Mineduc
2		Resolución de problema	Aplicación de calculo	Alto	Del Mineduc
1		Medición y geometría	Perímetro y figura geométrica	Medio	Del Mineduc
7	5to básico	Números, sus relaciones y operaciones	Suma, resta, división, fracciones.	Alto	Del Mineduc
10		Resolución de problema	Aplicación de calculo	Alto	Del Mineduc
1		Medición y geometría	Perímetro y figura geométrica	Medio	Del Mineduc
	6º básico	Números, sus	Números	Alto	Del Mineduc

		relaciones y operaciones	fraccionarios		
		Procesos de cambio	Variación proporcional	Alto	Del Mineduc
		Medición y geometría	Áreas y cuerpos geométricos	Alto	Del Mineduc
		Tratamiento de información	Tratamiento de información	Medio	Del Mineduc
		Medición y Geometría	Perímetros, áreas y figuras geométricas	Alto	Del Mineduc

En los niveles de quinto y sexto año básico, en el tema de fracciones, lo que se pretende es si el alumno posee las competencias para identificar la relación entre los datos, así como las operaciones necesarias para resolver un problema. Concretamente, expresar o interpretar la relación que existe entre el todo y sus partes mediante el uso de números fraccionarios. Igualmente, en el nivel de sexto año básico, el objetivo es valorar si el alumno es capaz de resolver problemas de porcentaje e identificar, a través de una situación, si la relación entre los datos es o no de variación proporcional directa.

En los niveles de cuarto a sexto año básico, en los problemas de áreas y cuerpos geométricos, si el alumno es capaz de reconocer una figura (prismas, en particular) y calcular su área total en función de la medida de sus lados.

En el nivel de sexto año básico se presenta un problema sobre tratamiento de la información con el objetivo de valorar la capacidad de los estudiantes para distinguir e interpretar la información de una tabla y resolver correctamente problemas que impliquen el análisis de dicha información.

En los niveles de educación básica desde cuarto a sexto año básico, se aplican pruebas de geometría en que se evalúa el conocimiento de medición de perímetro y figuras geométricas y en sexto año básico se valora la habilidad de los niños para clasificar figuras utilizando diversos criterios, por ejemplo: tamaño de sus lados, número de lados, etc. De igual manera, se espera que los alumnos puedan calcular perímetros y áreas mediante diferentes procedimientos.

ii. Entrevista.

Para conocer los procedimientos seguidos por los niños en estos problemas, se realizó una entrevista semi-estructurada. Estas entrevistas se realizaron inmediatamente después finalizar la prueba con el fin de evitar interferencias a la hora de reconstruir sus procesos. Se contemplaron las siguientes preguntas:

- 1) ¿Crees que lo resolviste correctamente?
- 2) ¿Me puedes explicar qué es lo que se pregunta en este problema?
- 3) ¿Qué procedimiento utilizaste, qué pasos seguiste?
- 4) ¿Por qué consideras que esa respuesta es la correcta?
- 5) ¿Verificaste si tenías algún error?
- 6) ¿Qué cosas que has aprendido en la escuela te sirvió para resolver este problema? (o fuera de ella si fuera el caso)

En el caso que la respuesta del alumno fuera incorrecta, se les preguntaba:

- 7) ¿Qué elementos no entiendes, qué confusiones presenta en los conceptos relacionados al problema específico?

6. RESULTADOS

En el nivel de cuarto año básico, la proporción de estudiantes que contestó correctamente cada uno de los problemas osciló entre 35% y 56%. Los porcentajes más altos fueron para números (56%) y la menor puntuación estuvo en geometría. En el nivel de quinto año, los mayores aciertos igualmente se presentan en números y sus operaciones (63%) y los mayores errores se ubican en la solución de problemas y geometría (53% y 59% respectivamente). En el sexto año básico, el mayor porcentaje de aciertos se presentó en *Tratamiento de la información* (68.4%) y *Números fraccionarios* (56.4%). Mientras que los temas que concentraron más errores fueron *Geometría* (54.5 y 58.9%) y *Variación proporcional* (50.9%), por lo que podemos afirmar que éstos entrañaron un mayor nivel de dificultad para los alumnos examinados.

Las pruebas aplicadas fueron iguales para todos los alumnos, tanto los alumnos con rendimiento alto como los alumnos con rendimiento emergente y en recuperación. Los primeros, presentaron en todos los niveles de escolaridad, menor dificultad en los diferentes tipos de pruebas pero en el mismo tipo de problemas que se le presentaron a los alumnos con menor rendimiento, siendo en estos últimos mayor la cantidad de alumnos que respondieron erróneamente a las diferentes tipos de prueba.

Los estudiantes de zonas rurales, presentaron igual nivel de dificultad a las pruebas, pero fue mayor la cantidad de alumnos que respondieron en forma errónea.

Gráfica 1. % DE ESTUDIANTES DE CUERTO AÑO BASICO DE TODA LA MUESTRA QUE RESPONDIERON CORRECTA E INCORRECTAMENTE EN LAS PRUEBAS

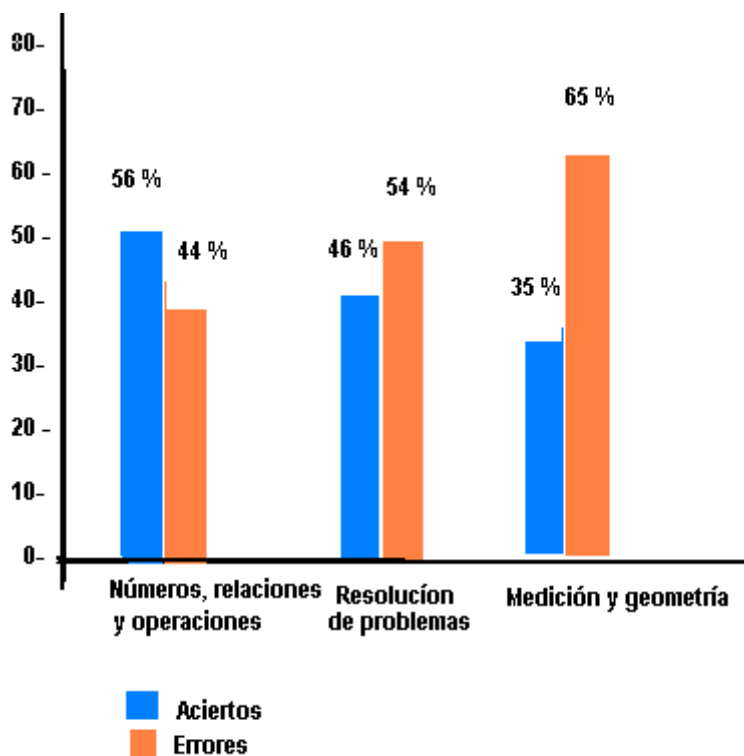


Grafico 2. % DE ESTUDIANTES DE QUINTO AÑO BASICO DE TODA LA MUESTRA QUE RESPONDIERON CORRECTA Y ERRONEAMENTE EN LAS PRUEBAS

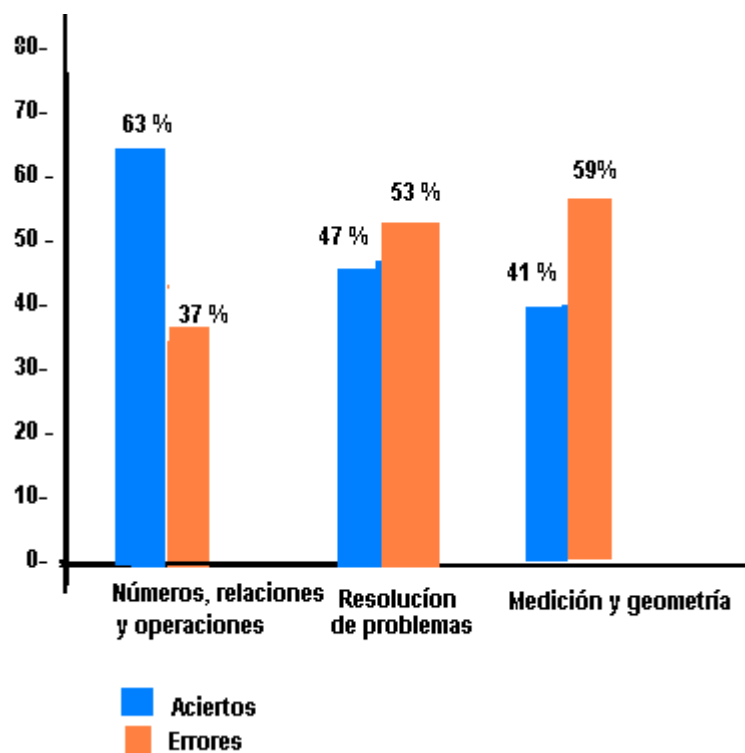
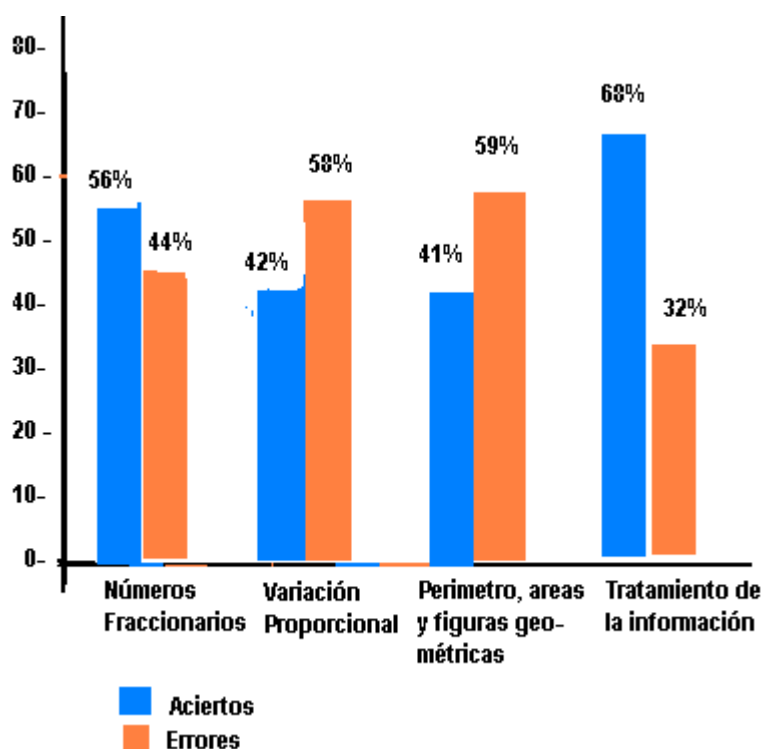


Gráfico 3. % DE ESTUDIANTES DE SEXTO AÑO BÁSICO DE TODA LA MUESTRA QUE RESPONDIERON CORRECTA Y ERRONEAMENTE EN LAS PRUEBAS



A continuación se analizan los resultados obtenidos de acuerdo con cada una de las variables inmersas en el proceso de la resolución de los problemas.

6.1. Conocimientos previos

Como se señaló, entendemos por conocimientos previos aquellos recursos - nociones, conceptos, fórmulas, algoritmos- con los que cuenta el estudiante para enfrentarse a un determinado problema (Barrantes, 2006).

Para valorar el nivel de conocimientos previos, se pidió a los niños que mencionaran algunos de los contenidos aprendidos en la escuela -o fuera de ella- que les sirvió para resolver el problema. Además, durante la entrevista se tomó nota del grado de suficiencia con el que contaban de los conceptos y nociones matemáticas requeridas para resolver los problemas.

De acuerdo con los resultados obtenidos, los conocimientos previos de los alumnos varían dependiendo del tema abordado. El siguiente cuadro presenta el porcentaje de alumnos que demostró conocimientos previos suficientes e insuficientes en cada uno de los problemas abordados.

Tabla N°4. % de alumnos de Cuarto año básico de acuerdo con los conocimientos previos mostrados

Problemas	Suficiente %	Insuficiente %
Números, relaciones y operaciones	71	29
Resolución de problemas	45	55
Medición y geometría	39	61

Tabla N°5 % de alumnos de Quinto año básico de acuerdo con los conocimientos previos mostrados

Problemas	Suficiente %	Insuficiente %
Números, relaciones y operaciones	58	42
Resolución de problemas	40	60
Medición y geometría	38	62

Tanto en cuarto año básico y quinto año básico, las principales deficiencias se presentaron en torno a los problemas de *Geometría y Medición*, en especial el de *Áreas y cuerpos geométricos*, dónde no más de la mitad de los alumnos mostró un suficiente dominio conceptual.

Tabla N°6 % de alumnos de Sexto año básico de acuerdo con los conocimientos previos mostrados

Problemas	Suficiente %	Insuficiente %
Números fraccionarios	68	32
Variación proporcional	45	55
Perímetros, áreas, figuras geométricas	39	61
Tratamiento de la información	72	28

En alumnos de sexto año básico, igualmente los problemas de Perímetros, áreas y figuras geométricas, menos de la mitad de los alumnos mostró un suficiente dominio conceptual. En el problema que se les presentó, para su resolución se requería el dominio del concepto de área y el reconocimiento de las características de un prisma cuadrangular, así como de los polígonos que los constituyen.

Entre las dificultades más recurrentes, podemos distinguir insuficiencia en el manejo de las características de este prisma, ya que sólo dos de sus caras laterales son cuadradas y las otras rectangulares. Además, también se advierte descuido en la exploración del dibujo pues en éste se debe apreciar que las caras frontal y posterior son rectangulares y su área es de 20 m² cada una. Por lo que, las dificultades para resolver este problema se ubican tanto en el ámbito de los conocimientos como en el de las habilidades matemáticas. Probablemente, lo anterior se debe a la forma como está enunciado el problema. Al señalar que se trata de un prisma cuadrangular, los estudiantes no se detienen a observar en el dibujo que se trata de una figura rectangular y no de un cuadrado.

Otro problema con deficiencias importantes resultó ser el de *Variación proporcional*, donde sólo 45% de los estudiantes mostraron conocimientos suficientes. Los alumnos necesitaban manejar los conceptos de proporción y porcentaje y saber calcularlo. Los errores más frecuentes tienen que ver con hacer uso del algoritmo de la regla de tres, sin una noción clara de las cantidades que están en juego y sus relaciones proporcionales. Así, hubo alumnos que identificaron que 30 flores equivalía al 100%, pero no pudieron determinar las cantidades sobre las cuales debían calcular las proporciones.

Ilustración 1. Cálculo de proporciones

Rosa hizo un arreglo floral con 30 flores. Ella colocó tres claveles blancos por cada dos margaritas. Qué porcentaje de margaritas utilizó para el arreglo?



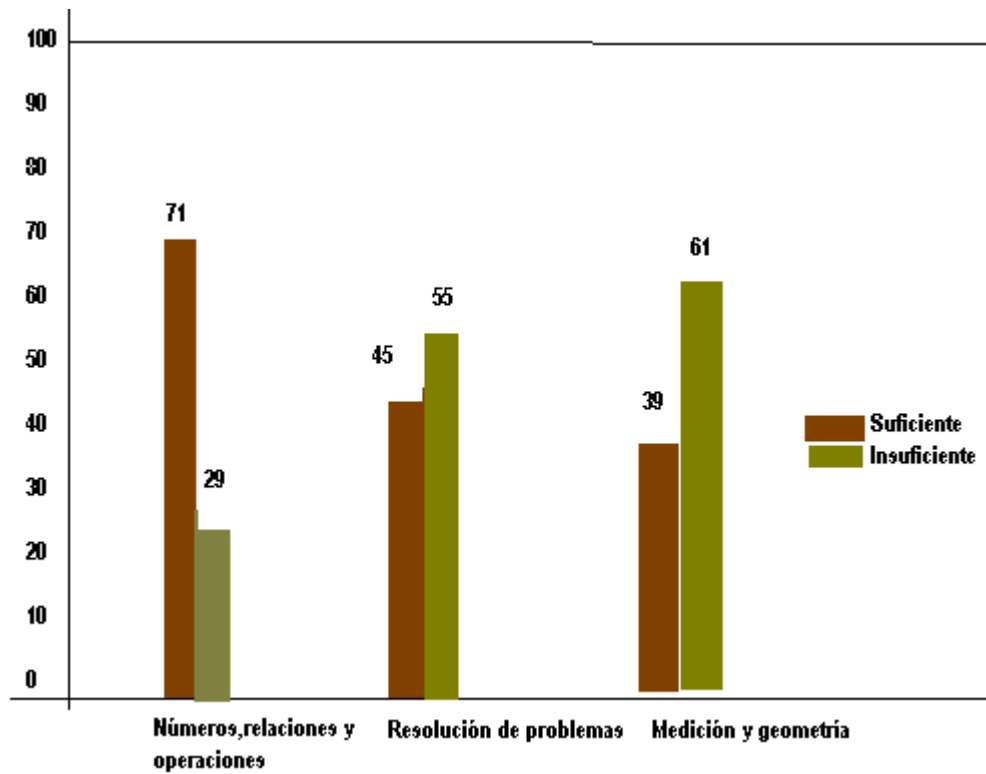
Esto nos lleva a reflexionar sobre el hecho de que los niños aprenden a hacer uso indiscriminado de ciertos algoritmos, sin una comprensión del sentido de los mismos, en este caso particular resulta iluminador el siguiente comentario de un alumno “para sacar el porcentaje tienes que multiplicar y poner un punto”.

Sin embargo, es preciso hacer notar que no todos los problemas reportaron la misma insuficiencia de conocimientos, tal es el caso de los *Números fraccionarios* donde mas del cincuenta por ciento de los estudiantes (68 %) contaba con un marco conceptual suficiente; es decir, realizaron correctamente el algoritmo de suma y resta de fracciones y, en su defecto, quienes mostraron menor dominio en el algoritmo, lograron resolver el problema con el uso de operaciones aritméticas básicas, gracias a que tenían claros los conceptos de unidad, fracción y reparto y las relaciones que existen entre éstos.

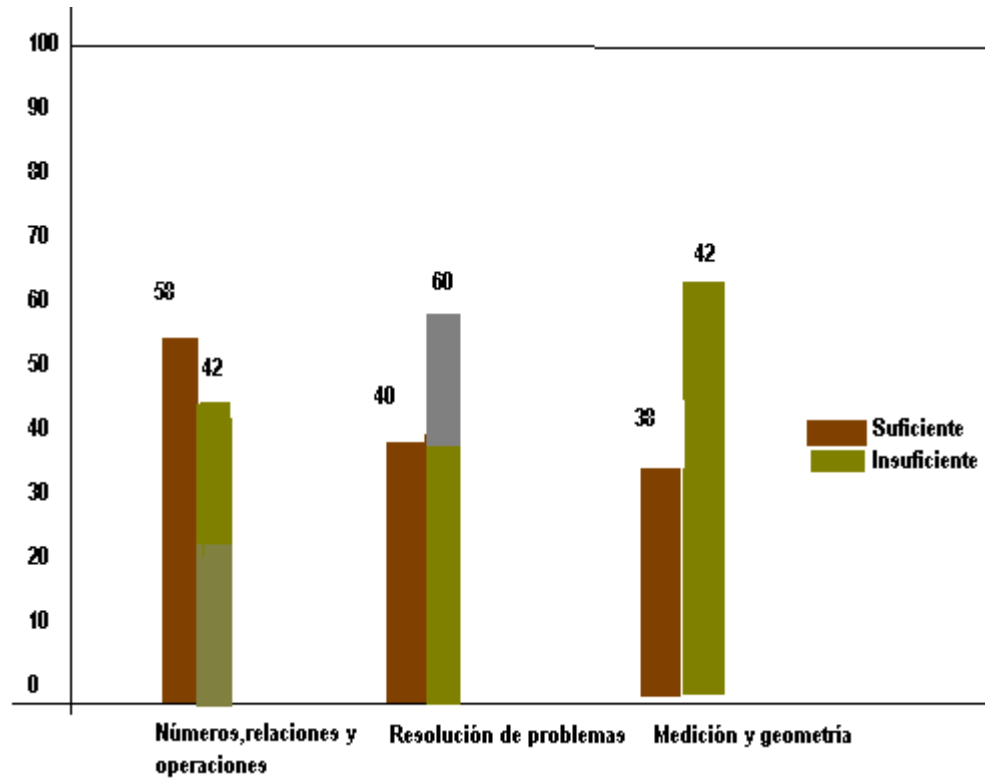
Llama la atención el problema de *Tratamiento de la información* ya que la mayoría los estudiantes mostraron un conocimiento previo suficiente. Sin embargo, cabe señalar que éste fue el único con un nivel de dificultad medio, que no requería de un marco conceptual específico. En este problema, más que conocimientos, se requería habilidad de análisis y selección de datos, lo que demuestra que los alumnos están familiarizados con el análisis de información organizada en tablas y que son capaces de distinguir la información a partir de cantidades porcentuales.

Al analizar el nivel de conocimientos previos contra solución de los problemas, se observa que aproximadamente 5 de cada 10 alumnos que contaban con conocimientos previos suficientes contestaron de manera correcta todos los problemas, con excepción de *Áreas y cuerpos geométricos*, donde la proporción aumentó a 6 de cada 10. En contraparte, cerca de 9 de cada 10 de estudiantes con conocimientos previos insuficientes en los problemas de *Perímetros, áreas y figuras geométricas* contestaron incorrectamente, y 7 de cada 10, los problemas de *Números fraccionarios* y *Variación proporcional*.

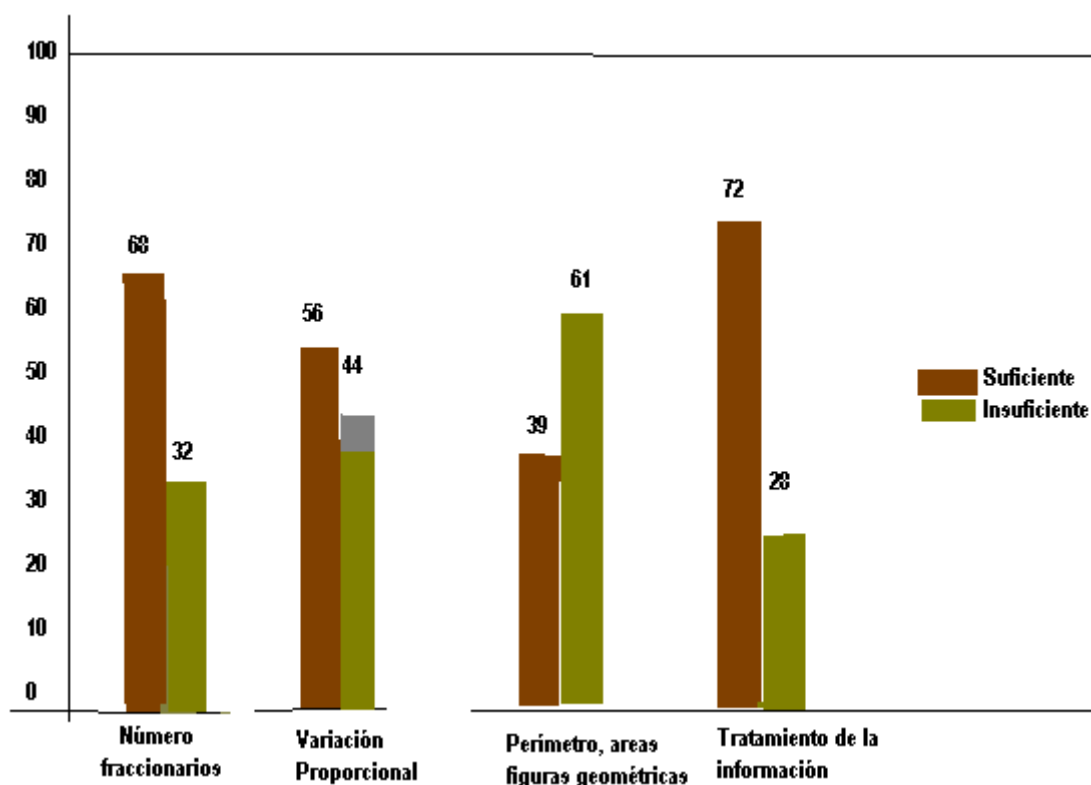
GRAFICA N°4. % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SUS CONOCIMIENTOS PREVIOS



GRAFICA Nº 5 % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SUS CONOCIMIENTOS PREVIOS



GRAFICA Nº 6 % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SUS CONOCIMIENTOS PREVIOS



Como se observa en la gráfica, los conocimientos previos parecen proveer a los alumnos de una herramienta fundamental que posibilita el éxito al resolver problemas. Su importancia se acrecienta al momento de enfrentar problemas difíciles, como los de geometría, donde se registró una gran diferencia – hasta de 39% en alumnos de cuarto básico, 38% en alumnos de quinto básico y 39% en alumnos de sexto básico, las proporciones de respuestas correctas de los alumnos que sí contaban con los conceptos y nociones matemáticas necesarias y quienes no, a favor de los primeros. De lo que se puede inferir que, si bien los conocimientos previos juegan un rol fundamental en la resolución de problemas, en el caso de los difíciles tal herramienta resulta determinante, pues ante su ausencia los alumnos difícilmente podrán recurrir a otro recurso.

6.2. Comprensión del problema

Valorar la comprensión del problema implicó explorar si los alumnos lograron entender -ver claramente- lo que el problema planteaba, ya que si un alumno no lograba entender, no podría resolverlo y si lo hizo, sería por casualidad (Polya, 1965). La comprensión supone entender la pregunta, discriminar los datos y las relaciones entre éstos y entender las condiciones en las que se presentan.

Para comprobar lo anterior, se les pidió que explicaran con sus palabras qué era lo que se les estaba preguntando. Se puso especial atención en observar si el alumno sabía ¿cuáles eran los datos?, ¿cuál era la condición?, y ¿si los datos eran suficiente para determinar la resolución del problema? Al igual que en el apartado anterior, se consideraron las demás respuestas de la entrevista que pudieran dar cuenta de este aspecto. Los resultados permitieron agrupar a los estudiantes en tres categorías:

i. Quienes comprendieron el planteamiento del problema.

ii. Quienes *comprendieron parcialmente el problema*, que agrupa

- Los que comprendían el problema, los conceptos y las operaciones, pero confundieron lo que se les preguntó.
- Los que comprendieron la pregunta y los conceptos, pero no identificaron las operaciones que era necesario realizar.
- Finalmente, aquellos que entendieron la pregunta, pero no comprendían los conceptos y, además, no sabían qué operaciones utilizar.

iii. Quienes *no comprendieron el planteamiento del problema*.

El siguiente cuadro presenta la distribución de alumnos de acuerdo con el grado de comprensión que mostraron en cada uno de los problemas.

Tabla N°7. % de alumnos de cuarto año básico de acuerdo con la comprensión de los problemas

Problema	Sí lo comprende	No lo comprende	Comprende parcialmente		
			Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la pregunta	Comprende la pregunta, pero no los conceptos, ni identifica las operaciones	Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones
Números, relaciones y operaciones	56,7	25,3	5,7	6,8	5,6
Resolución de problemas	41,8	48,8	8,2	2,9	3,3
Medición y geometría	32,6	43,6	4,2	4,9	4,7

Tabla N°8. % de alumnos de quinto año básico de acuerdo con la comprensión de los problemas

Problema	Sí lo comprende	No lo comprende	Comprende parcialmente		
			Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la pregunta	Comprende la pregunta, pero no los conceptos, ni identifica las operaciones	Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones
Números, relaciones y operaciones	55,2	34,2	4,7	3,8	2,1
Resolución de problemas	39,2	45,1	6,2	4,9	3,6
Medición y geometría	31,2	56,3	5,1	3,7	3,7

Tabla N°9 % de alumnos de sexto año básico de acuerdo con la comprensión de los problemas

Problema	Sí lo comprende	No lo comprende	Comprende parcialmente		
			Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la pregunta	Comprende la pregunta, pero no los conceptos, ni identifica las operaciones	Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones
Números fraccionarios	49,1	10,9	16,4	14,5	9,1
Variación proporcional	45,5	16,4	3,6	21,8	12,7
Perímetros, áreas, figuras geométricas	30,4	48,2	3,6	8,9	8,90
Tratamiento de la información	75,5	9,2	6,4	5,7	3,2

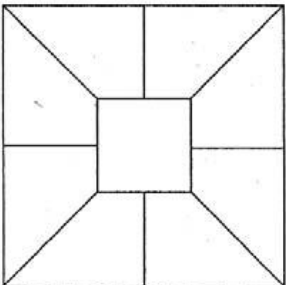
La comprensión de los problemas –entender la pregunta, datos y condiciones- varía de acuerdo con el tema abordado y su nivel de dificultad. En el problema que requería el desempeño de competencias básicas, como la comprensión lectora, los estudiantes mostraron un mayor nivel de comprensión que en aquellos que demandaban conocimientos específicos, como el concepto de perímetro o área. En consecuencia, la menor comprensión se presenta en torno a los problemas más difíciles: Resolución de problemas y Medición y geometría en los casos de los estudiantes de cuarto y quinto año básicos y de *Geometría y Variación proporcional* en los casos de los estudiantes de sexto año de enseñanza básica.

En general, los problemas fueron comprendidos cabalmente por menos de la mitad de los alumnos, a excepción del referido a Números, relaciones y operaciones en los casos de cuarto y quinto año básico y *Tratamiento de la información* (.75,5%) en el caso de los estudiantes del sexto año básico. Los casos más preocupantes fueron los casos de Medición y geometría en estudiantes de cuarto y quinto año básico y de *Perímetros, áreas y figuras geométricas*, donde sólo 3 de cada 10 pudieron explicarlo correctamente, manejar sus conceptos e identificar las operaciones necesarias.

La falta de comprensión de estos problemas se debió a la combinación de varios factores. El más importante fue la dificultad para manejar las nociones de área y perímetro al mismo tiempo, muchos confundieron ambos conceptos, ya que en el caso de los estudiantes de sexto año básico, el problema plantea que el *cuadrado está dividido en 9 partes de igual área* y luego afirma que *el perímetro del cuadrado exterior es de 24 cm*. El siguiente es un ejemplo de dicha confusión:

Ilustración 2: Confusión de los conceptos área y perímetro

14. El cuadrado de la figura está dividido en 9 partes de igual área. Si el perímetro del cuadrado exterior es de 24 cm ¿cuánto mide el lado del cuadrado interior?



☒ A. 2 cm
 B. 3 cm
 C. 4 cm
 D. 6 cm

Handwritten calculation: $9 \overline{) 24} \begin{array}{r} 2 \\ 6 \end{array}$

Como se puede observar este niño dividió el perímetro -24 cm.- por 9, cuando ésta era la condición para el área.

Además, también detectamos insuficiencia en el manejo de las características de las figuras geométricas, un ejemplo se encuentra en las siguientes explicaciones de algunos de los estudiantes:

“Yo entendí que 24 era el área del cuadrado, entonces pensé que sus lados medían 6 y 4 cm”.

Otro factor que obstaculizó el entendimiento fue confundir la pregunta. En este caso, en lugar de ubicar que la incógnita era el *lado del cuadro interior*, pensaron que era su área o su perímetro.

Vale la pena, explicar que este problema es de tipo “olimpiadas” y por tanto no se pregunta de manera directa al alumno por una fórmula o el enunciado de un teorema, más bien se procura ver qué tanto domina los conceptos que les atañen.

Menos de la mitad de los estudiantes de cuarto y quinto año básico, comprendió las preguntas en el tema Resolución de problemas. La confusión con la respuesta se observa en 8,2 y 6,2%. En el caso de sexto año básico, casi la mitad de los estudiantes (49.1%) comprendió totalmente lo que preguntaba el problema de *Números fraccionarios*. Cuatro de cada diez sólo lo comprendió de forma parcial. Dentro de este grupo, la principal dificultad remite a la impulsividad en la lectura, ya que 16.4% entendió el planteamiento del problema, los conceptos y las operaciones que era necesario realizar, pero confundieron lo que les pedía la pregunta, una muestra de ello se presenta a continuación:

Ilustración 3. Confusión de la pregunta

José compró 42 quesos para vender, 30 eran de Curicó y 12 de Talca. Si le quedaron 26 de Curicó y 2 de Talca ¿cuántos quesos vendió?

☒ A 18
☐ B 20
☐ C 44
☐ D 49

$$\begin{array}{r}
 30 \\
 + 12 \\
 \hline
 42
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 32 \\
 - 2 \\
 \hline
 30
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 30 \\
 - 26 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 30 \\
 - 2 \\
 \hline
 28
 \end{array}$$

En este ejemplo, se observa como el alumno realiza correctamente las operaciones, pero se confunde con la pregunta final, ya que respondió cuántos quesos le quedaron a José (A), en lugar de cuántos vendió (C). Cabe señalar que este tipo de problema se utiliza con frecuencia en muchas evaluaciones oficiales y más que competencias matemáticas, pone a prueba competencias lectoras y capacidad de concentración; ya que por lo general este tipo de preguntas “despista” al estudiante. Quizá sería necesario ahondar en la pertinencia e idoneidad de este tipo de preguntas para evaluar las competencias matemáticas.

Por otra parte, 14.5% de los estudiantes de este mismo grupo, distinguió claramente cuál era la incógnita, pero no contaba con el marco conceptual suficiente para comprenderla, ni supo qué operaciones debía utilizar. El 9.1% restante comprendió la pregunta y los conceptos, pero no identificó las operaciones.

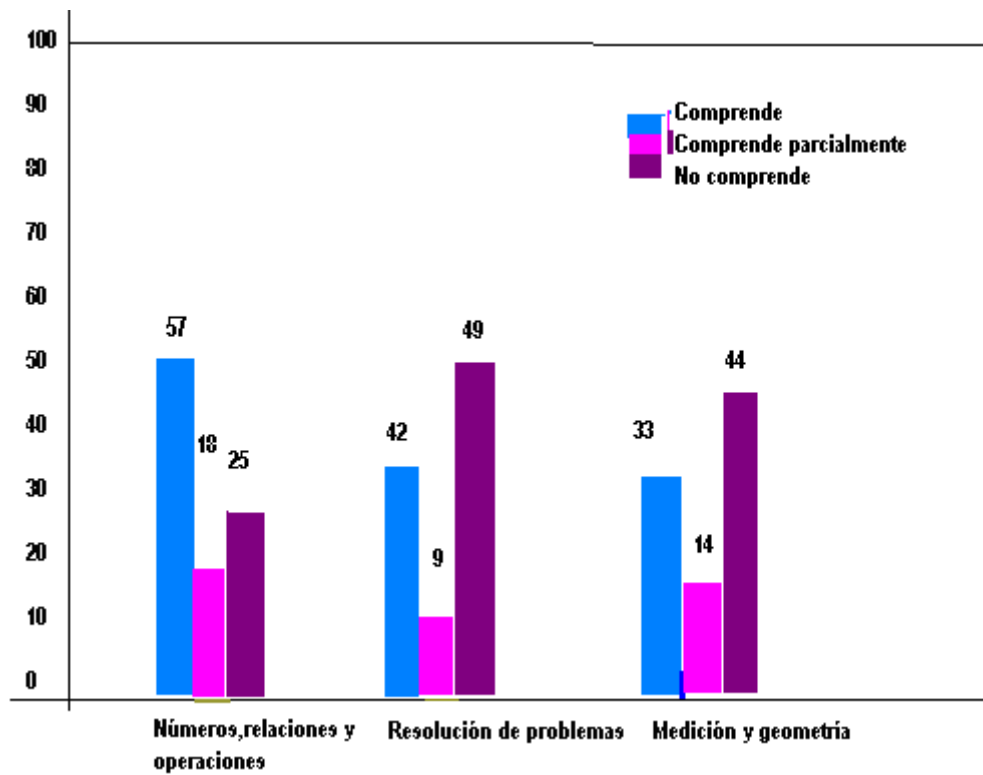
En el caso de los estudiantes de cuarto y quinto año básico, el 14% solo entendió parcialmente la pregunta lo que se relaciona con la falta de conocimientos previos. En el caso de los estudiantes de sexto año básico, poco menos de la mitad de los estudiantes comprendió la pregunta sobre *Variación Proporcional* (45.5%), mientras que más de la tercera parte (38.1%) alcanzó una comprensión parcial. Los alumnos de sexto año básico que no comprendieron el problema o quienes lo hicieron de forma parcial, presentaron confusiones principalmente en la noción de proporción y en el cálculo de porcentajes. Esto guarda relación con la insuficiencia de conocimientos previos señalada en el apartado anterior.

El problema de *Áreas y cuerpos geométricos* reportó resultados similares al anterior (30,4% comprensión total y 21,4% parcial). La principal dificultad de este problema se encontró en la confusión de las características de un prisma cuadrangular y sus polígonos, así como en las operaciones a realizar para calcular el área total de un prisma, como ya hemos señalado.

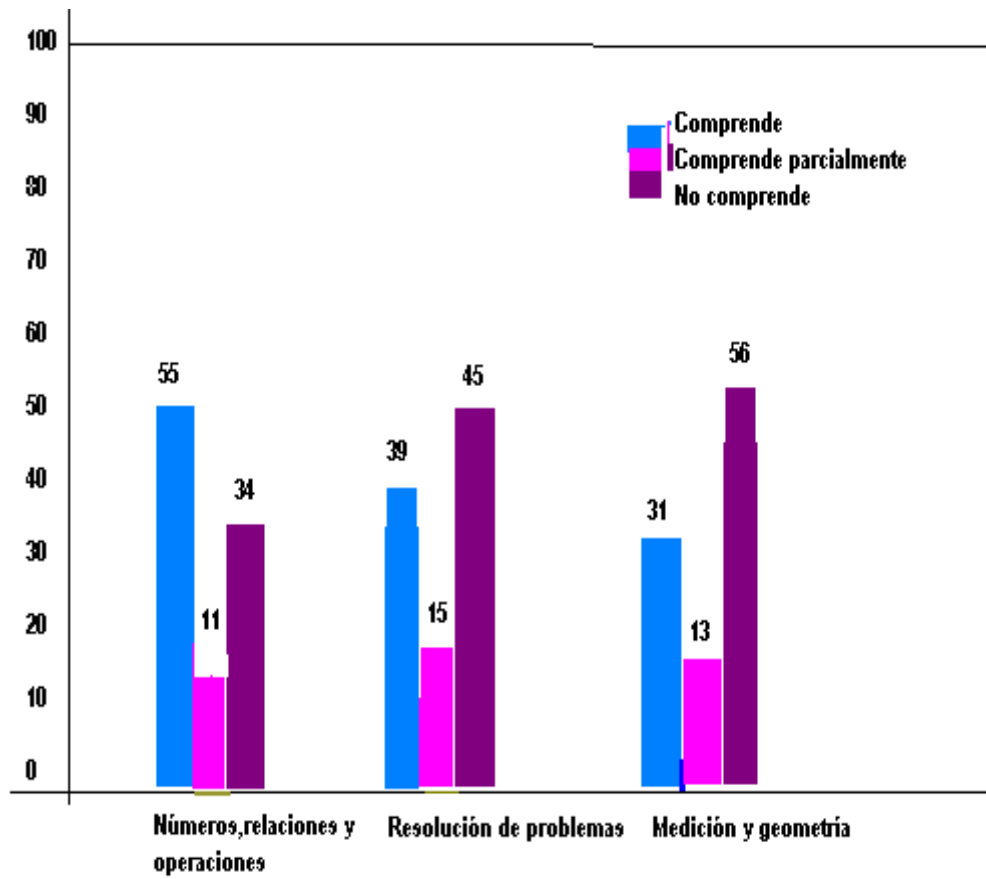
Al relacionar el grado de comprensión del problema con la solución del mismo, se observa que el resultado depende del nivel de entendimiento alcanzado. La gran mayoría de los estudiantes –entre el 75 y el 92.6%– que entendió cuál era el planteamiento, los datos y las condiciones del problema, pudo llegar a la solución correcta.

En contraparte, la no comprensión del planteamiento conduce a resultados erróneos la mayoría de las veces (entre el 80 y 100% de los casos). Esto puede explicarse por el hecho de que un alumno que no comprende el planteamiento de un problema definitivamente no puede ejecutar una estrategia para buscar un resultado congruente con la incógnita, aún sabiendo operar algoritmos. En el caso contrario, cuando un alumno comprende correctamente lo que se le pregunta, ubica los datos y condiciones del planteamiento, aunque no conozca los algoritmos, siempre le quedará la lógica y el razonamiento puro, por lo que tendrá mejores recursos para intentar llegar a una respuesta satisfactoria (ver anexo de tablas no. 3).

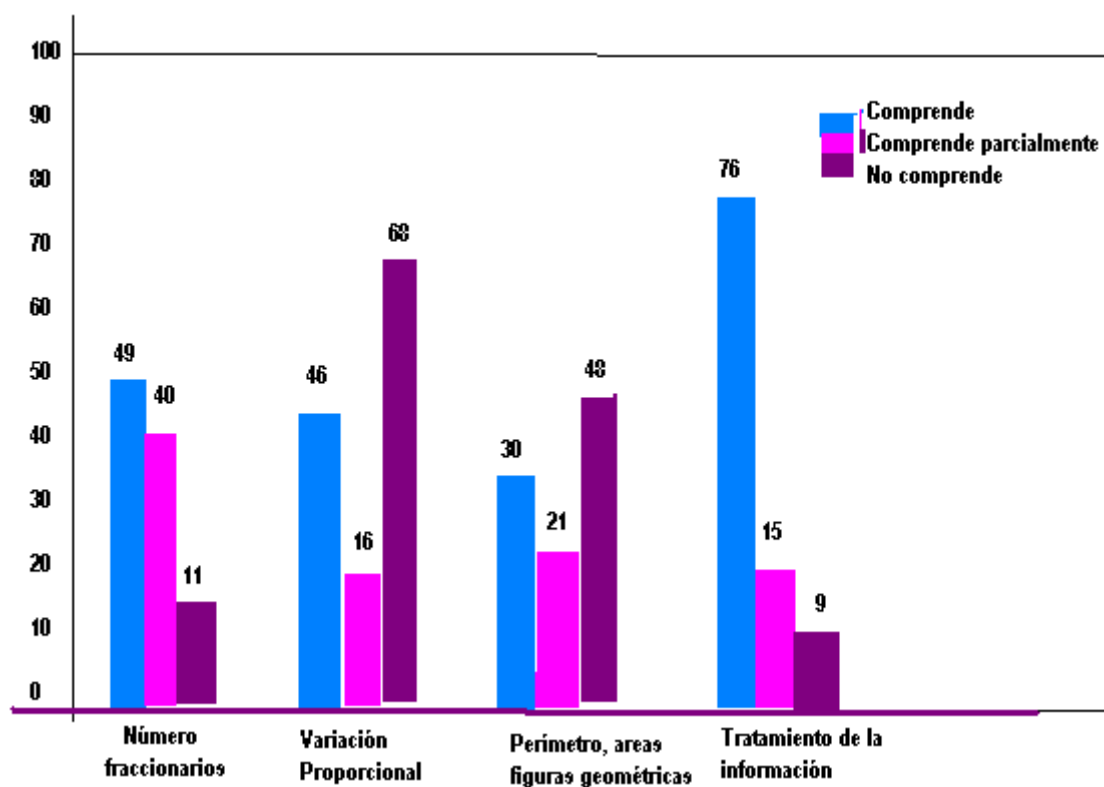
GRÁFICA 7. % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU NIVEL DE COMPRENSION



GRÁFICA 8 % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU NIVEL DE COMPRENSION



GRÁFICA 9. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BÁSICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU NIVEL DE COMPRENSIÓN



Es necesario aclarar que la comprensión del problema requiere el manejo de los conceptos fundamentales, ya que la sola identificación de la pregunta (textual) no garantiza la satisfactoria solución. Entre el 70 y 80% de los alumnos que entendieron la pregunta, en variación proporcional y perímetro, áreas y figuras geométricas, pero no conocían los conceptos ni las operaciones que debían realizar, contestaron equivocadamente los problemas.

Vale la pena hacer notar que la variable comprensión parece tener un mayor impacto en la resolución exitosa, ya que es mayor la proporción de respuestas correctas entre quienes comprenden el problema que entre aquellos que sólo cuentan con adecuados conocimientos previos.

El análisis estadístico muestra que, en efecto, la variable comprensión tiene una correlación más fuerte con la correcta solución del problema que el manejo de conocimientos previos. La excepción se presenta en los problemas de Medición y Geometría y de Perímetros, áreas, figuras geométricas, donde los conocimientos previos presentaron el coeficiente más alto. En el caso de los problemas que trabajaron los estudiantes de sexto año básico, esto reitera el análisis que hemos venido haciendo, ya que el manejo de conceptos adecuados sobre el prisma y sus características era determinante para la solución. En el anexo 3, *Correlaciones*, se presenta una mayor descripción de este análisis.

TABLA 10 . COEFICIENTE DE CORRELACIÓN CONOCIMIENTOS PREVIOS Y COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA. Caso estudiantes de cuarto año basico

Problemas		Conocimientos previos	Comprensión del problema
Números, relaciones y operaciones	Correlación de Pearson	.257 (*)	.612 (**)
	Sig. (bilateral)	.028	.000
Resolución de problemas	Correlación de Pearson	.396 (**)	.540 (**)
	Sig. (bilateral)	.000	.000
Medición y geometría	Correlación de Pearson	.593	.449 (**)
	Sig. (bilateral)	.000	.000

TABLA 11. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN CONOCIMIENTOS PREVIOS Y COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA. Caso de estudiantes de quinto año basico

Problemas		Conocimientos previos	Comprensión del problema
Números, relaciones y operaciones	Correlación de Pearson	.244 (*)	.627 (**)
	Sig. (bilateral)	.031	.000
Resolución de problemas	Correlación de Pearson	.395 (**)	.538 (**)
	Sig. (bilateral)	.000	.000
Medición y geometría	Correlación de Pearson	.695 (**)	.493 (**)
	Sig. (bilateral)	.000	.000

TABLA 12 . COEFICIENTE DE CORRELACIÓN CONOCIMIENTOS PREVIOS Y COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA. Caso de estudiantes de sexto año básico

Problemas		Conocimientos previos	Comprensión del problema
Números fraccionarios	Correlación de Pearson	.234 (*)	.717 (**)
	Sig. (bilateral)	.035	.000
Variación proporcional	Correlación de Pearson	.493 (**)	.564 (**)
	Sig. (bilateral)	.000	.000
Perímetros, áreas, figuras geométricas	Correlación de Pearson	.739 (**)	.522 (**)
	Sig. (bilateral)	.000	.000
Tratamiento de la información	Correlación de Pearson	- (a)	.720 (**)
	Sig. (bilateral)	.	.000

- La correlación es significativa al nivel 0.05 (bilateral)
- ++ La correlación es significativa al nivel (0.01 (bilateral).
- a No se puede calcular porque al menos una variable es constante.

Además de conceptos y nociones, en el proceso de resolución entran en juego otros factores como la impulsividad en la lectura que entorpece la comprensión conduciendo a resultados erróneos.

6. 3. Concepción de un plan

El segundo paso previsto por Polya en su método para resolver problemas es la concepción de un plan. En este momento es preciso que los estudiantes perciban las relaciones existentes entre los diferentes elementos con el fin de derivar acciones que conduzcan al resultado correcto. Valle *et al* (2007) explican que se trata de ver lo que liga a los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan para alcanzarla. En fin, como cualquier plan, supone el establecimiento de pasos o tareas para llegar a un objetivo, que es la solución correcta.

Durante las entrevistas a los alumnos intentamos explorar su capacidad para establecer un diseño de resolución. Se les pidió que describieran o recrearan el procedimiento utilizado, así como los pasos seguidos para resolver el problema. Clasificamos sus respuestas en torno a dos categorías dicotómicas y, además, se exploró una tercera que alude a un proceso de resolución específico: la creatividad, tal como se indica a continuación.

- i. Quienes pudieron recrear el procedimiento empleado y quienes no.
- ii. Quienes pudieron explicar y justificar el sentido de sus acciones y quienes no
- iii. Los que establecieron un plan creativo.

Estas categorías de análisis permitieron un acercamiento más preciso a la concepción del plan por parte de los alumnos. Los estudiantes de cuarto año básico en una proporción del 84,7% recrean los procedimientos en operaciones y justifica sus acciones. En resolución de problemas, el 69,4% recrea los procedimientos, en tanto que en medición y geometría, el porcentaje de alumnos que recrea el procedimiento es de menos de la mitad de los alumnos (47,2%). En el quinto año básico, igualmente, 73,6 % logra recrear los procedimientos, pero menos alumnos de este grado respecto al cuarto año básico, logra diseñar un plan. El logro alcanzado varía entre 64,8 y 34,3% de los estudiantes en resolución de problemas y medición y geometría respectivamente. En el sexto año básico, encontramos que altas proporciones –entre 73,7%- pudieron recrear el procedimiento utilizado en los cinco problemas; sin embargo, no todos pudieron dar cuenta del diseño de un plan en estricto sentido. Esto fue conseguido por una menor proporción de alumnos que sí pudieron justificar el sentido del procedimiento seleccionado. En resolución de problemas con variaciones proporcionales, geometría y tratamiento de la información, la mayoría de los estudiantes hizo creación de un plan.

TABLA 13 . % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO DE ACUERDO CON SU CONCEPCIÓN DEL PLAN

Problemas	Recrea el procedimiento		Justifica sus acciones	
	Sí	No	Sí	No
Números, relaciones y operaciones	84,7	15,3	77,6	22,4
Resolución de problemas	69,4	31,6	42,2	57,8
Medición y geometría	47,2	52,8	38,4	61,6

TABLA 14. % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO DE ACUERDO CON SU CONCEPCIÓN DEL PLAN

Problemas	Recrea el procedimiento		Justifica sus acciones	
	Sí	No	Sí	No
Números, relaciones y operaciones	73,7	26,3	69,4	30,6
Resolución de problemas	64,8	35,2	46,8	53,2

Medición y geometría	34,3	65,7	30,6	69,4
----------------------	------	------	------	------

TABLA 15. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO DE ACUERDO CON SU CONCEPCIÓN DEL PLAN

Problemas	Recrea el procedimiento		Justifica sus acciones	
	Si	No	Sí	No
Números fraccionarios	76,6	23,4	69,4	30,6
Variación proporcional	83,5	16,5	56,4	35,1
Perímetros, áreas, figuras geométricas	75,4	16,3	48,2	42,9
Tratamiento de la información	100,0	0,0	91,3	8,7

Lo primero que salta a la vista es que, para la mayoría de los problemas, los alumnos no alcanzaron a planear adecuadamente un procedimiento, es decir, establecer los pasos y estrategias con base en un objetivo claro. La falta de un plan justificado se acentúa en los casos de Resolución de problemas y Medición y geometría para estudiantes de cuarto y quinto año básico y de *Variación proporcional* y Perímetros, áreas, figuras geométricas (entre 56,4 y 48,2%). Por el contrario, en el problema de *Tratamiento de la información* todos los alumnos describieron el procedimiento utilizado y 9 de cada 10 explicaron para qué lo hacían. Esto ofrece indicios de que para los problemas más sencillos el establecimiento de un plan resulta igualmente fácil, mientras que dicha tarea se complejiza a medida que incrementa el nivel de dificultad del problema a resolver.

En el ejemplo siguiente, se puede observar la ausencia de un plan con un objetivo claro y que, a falta de ello, la niña realizó las operaciones que se le fueron ocurriendo:

ILUSTRACIÓN 4 . FALTA DE ESTABLECIMIENTO DE UN PLAN

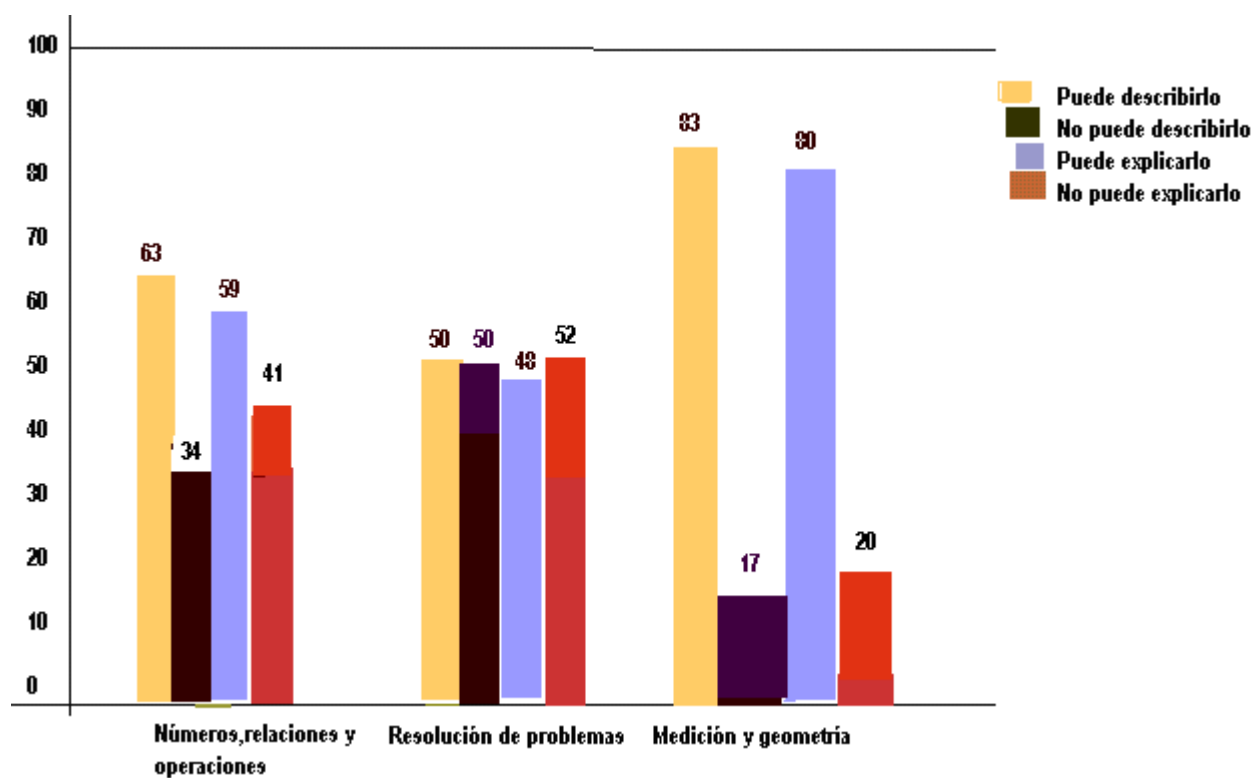
Rosa hizo un arreglo floral con 30 flores. Ella colocó tres claveles blancos por cada dos margaritas. Qué porcentaje de margaritas utilizó para el arreglo?

- X
- A. 15%
 - B. 30%
 - C. 40%
 - D. 60%

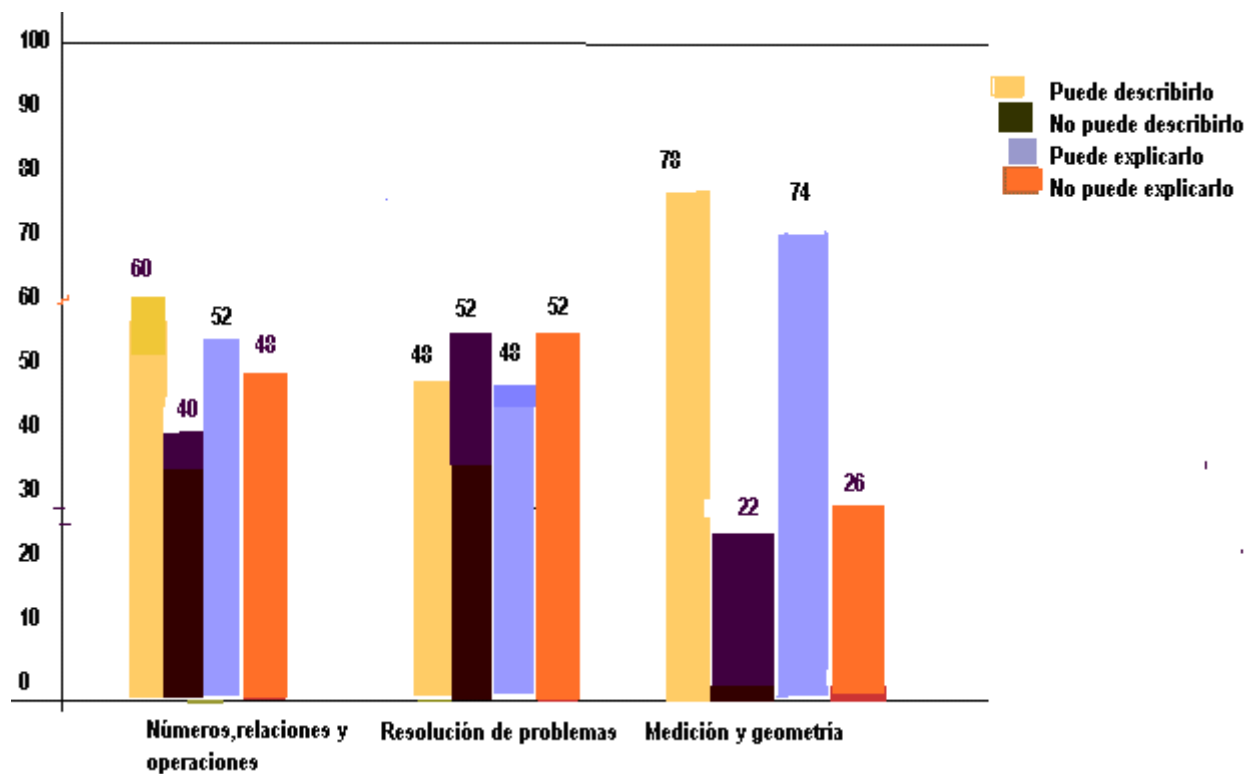
$$\begin{array}{r} 30 \text{ ————— } 100 \\ 3 \text{ ————— } 0\% \end{array}$$

El cruce de la concepción del plan con la solución de los problemas, indica que poco más de la mitad de los alumnos que pudieron describir los pasos seguidos para llegar al resultado contestaron de manera correcta los problemas de *Variación proporcional* (54%), *Números fraccionarios* (62.2%), y *Tratamiento de la información* (68.4%).

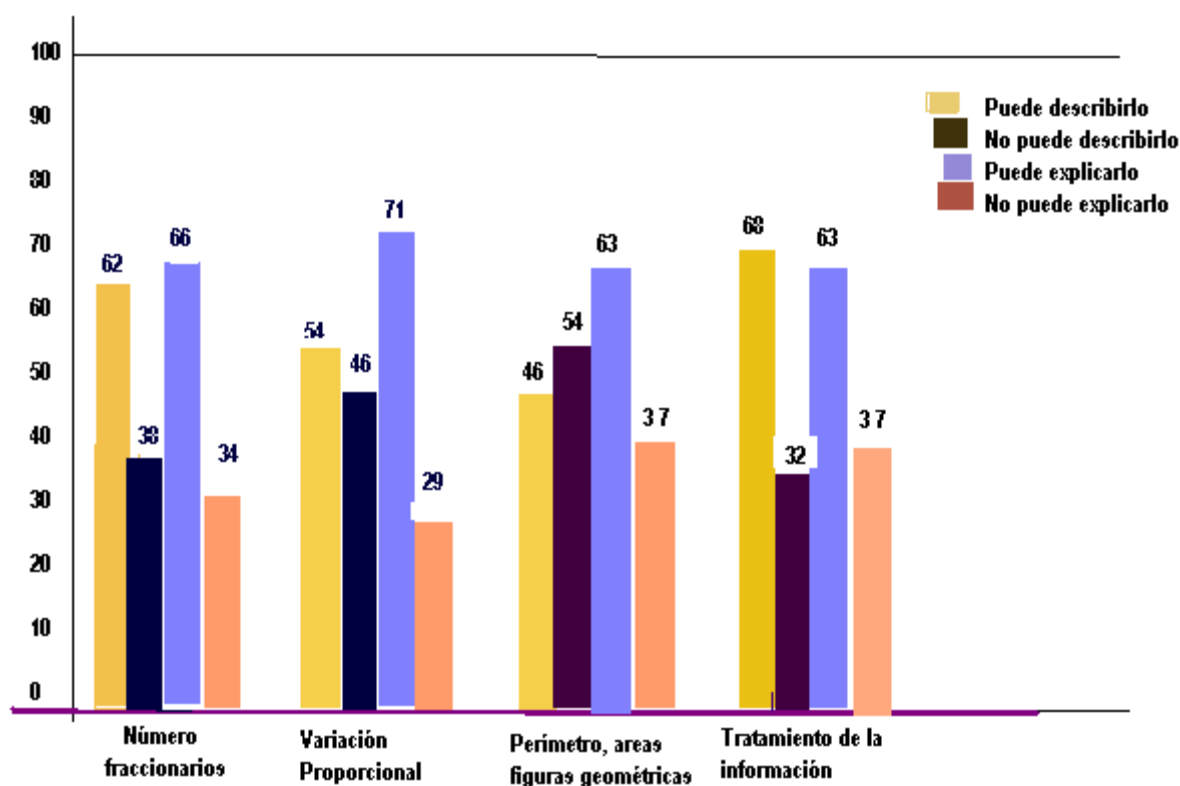
GRÁFICA 10 % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU CONCEPCIÓN DEL PLAN



GRÁFICA 11. % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU CONCEPCIÓN DEL PLAN



GRÁFICA 12. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU CONCEPCIÓN DEL PLAN



Sin embargo, la concepción de un plan -en sentido estricto- tiene un mayor impacto en el número de aciertos. Los estudiantes que trazaron planes justificados, esto es que explicaron el sentido del procedimiento utilizado, tuvieron más respuestas correctas en todos los problemas. Cerca de 7 de cada 10 estudiantes que justificaron sus acciones contestaron acertadamente las preguntas del examen.

El análisis estadístico muestra que para los casos de *Variación proporcional* y *Perímetros, áreas y figuras geométricas* existe una correlación significativa entre esas dos variables, siendo más fuerte en la explicación del procedimiento, a diferencia de lo que ocurre para *Áreas y cuerpos geométricos* y *Número fraccionarios* donde sólo dicha variable tiene una correlación significativa (ver anexo 3).

TABLA 16. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DESCRIPCIÓN Y EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO CASO DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO

Problemas		Describe el procedimiento	Explica el procedimiento
Números, relaciones y operaciones	Correlación de Pearson	.231	.347 (*)
	Sig (bilateral)	.064	.018
Resolución de problemas	Correlación de Pearson	.312 (*)	.483 (**)
	Sig (bilateral)	.023	.000
Medición y geometría	Correlación de Pearson	.268	.587 (**)
	Sig (bilateral)	.069	.000

TABLA 17. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DESCRIPCIÓN Y EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO CASO DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO

Problemas		Describe el procedimiento	Explica el procedimiento
Números, relaciones y operaciones	Correlación de Pearson	.254	.397 (*)
	Sig (bilateral)	.066	.015
Resolución de problemas	Correlación de Pearson	.329 (*)	.499 (**)
	Sig (bilateral)	.032	.000
Medición y geometría	Correlación de Pearson	.279	.605 (**)
	Sig (bilateral)	.039	.001

TABLA 18. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DESCRIPCIÓN Y EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO CASO DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO

Problemas		Describe el procedimiento	Explica el procedimiento
Números fraccionarios	Correlación de Pearson	.267	.338 (*)
	Sig (bilateral)	.067	.027
Variación proporcional	Correlación de Pearson	.497 (*)	.497 (**)
	Sig (bilateral)	.032	.004
Perímetro, áreas, figuras geométrica	Correlación de Pearson	.266 (*)	.439 (**)
	Sig (bilateral)	.048	.003
Tratamiento de la información	Correlación de Pearson	.397 (*)	.493 (**)
	Sig (bilateral)	.058	.003

- La correlación es significativa al nivel 0.05 (bilateral).

** La correlación es significativa al nivel 0.01 (bilateral)

a No se puede calcular porque al menos una variable es constante.

Por otro lado, a partir del análisis de los datos, fue interesante detectar la capacidad de algunos estudiantes para diseñar planes creativos. En el caso de los estudiantes de cuarto año básico fueron 0,5 a 12,4 % los alumnos que lo construyeron. En el caso de los alumnos de quinto año básico fue mayor, de 2,3 a 95% los alumnos que lo construyeron planes recreativos. En el caso de los estudiantes de sexto año básico, fue notorio en los problemas de *Variación proporcional* y *Perímetros, áreas y figuras geométricas* – que los estudiantes fueron capaces de construir planes creativos: 2,7 y 6,9% de los alumnos.

TABLA 19.. % DE ALUMNOS DE CUERTO AÑO BÁSICO QUE ESTABLECIERON UN PLAN CREATIVO

Problema	Establece un plan creativo
Números, relaciones y operaciones	0,0
Resolución de problemas	0,5
Medición y geometría	12,4

TABLA 20.. % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BÁSICO QUE ESTABLECIERON UN PLAN CREATIVO

Problema	Establece un plan creativo
Números, relaciones y operaciones	0,0
Resolución de problemas	2,3
Medición y geometría	9,5

TABLA 21.. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BÁSICO QUE ESTABLECIERON UN PLAN CREATIVO

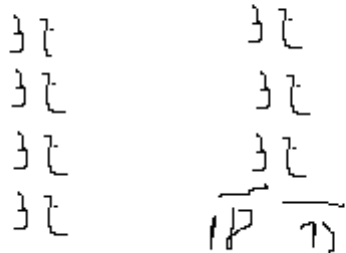
Problema	Establece un plan creativo
Números fraccionarios	0,0
Variación proporcional	2,7
Perímetros, áreas ,figuras geométricas	6,9
Trtamiento de la información	0,0

En el problema de cálculo de porcentajes (*Variación proporcional*) una alumna elaboró un esquema, donde separó el número de flores de cinco en cinco, hasta llegar a 30, de acuerdo con la disposición que indicaba el problema (3 claveles y 2 margaritas). Posteriormente sumó ambas columnas y así obtuvo el número total de claveles y margarita que poseía el arreglo.

ILUSTRACIÓN 5. ESTABLECIMIENTO DE UN PLAN CREATIVO

Rosa hizo un arreglo floral con 30 flores. Ella colocó tres claveles blancos por cada dos margaritas. Qué porcentaje de margaritas utilizó para el arreglo?

- ☒ A. 15%
☐ B. 30%
☒ C. 40%
☐ D. 60%



Con esta información la estudiante supo que el arreglo estaba conformado por 18 claveles y 12 margaritas. Para saber qué porcentaje de margaritas se había utilizado dijo: “si 30 flores es igual al 100%, 15 es igual a 50%, por lo tanto 12 debe ser igual a 40%”.

Otro ejemplo en torno al mismo problema, es el de un alumno que declaró que para calcular la proporción, en lugar de pensar que eran 30 flores, consideró que eran sólo 5 -3 claveles y 2 margaritas- y razonó que “si 5 flores son el 100%, una flor es el 20 y si son dos margaritas, la suma es 40%”. Cabe destacar que este alumno no necesitó apoyarse en algún dibujo o esquema, sino que obtuvo la relación proporcional a través de cálculo mental.

En cuanto a la resolución correcta de los problemas de forma creativa, llama la atención que 8 de cada 10 alumnos que implementaron este tipo de acercamiento en el problema de *Variación proporcional* respondieron correctamente y 4 de cada 10 estudiantes en el problema de *Perímetros, áreas y figuras geométricas*. Esto podría hacernos creer falsamente que lo creativo no es muy útil o que no es importante darle tanto peso, sin embargo, es necesario tomar en cuenta que el proceso creativo requiere tiempo y se basa en ensayo y error, quizá no sea la estrategia “más segura” en un examen de opción múltiple, donde únicamente se valoren respuestas correctas. Pero que un proceso creativo no se valore ni se vea reflejado en una evaluación tradicional, no puede desestimar lo provechoso de alentar a los alumnos a utilizar su imaginación en la resolución de problema.

6.4. Ejecución del plan (heurística-estrategias)

La ejecución del plan se refiere a las estrategias que implementa un alumno para resolver un problema. De acuerdo con Polya (1965), al ejecutar el plan se comprueba cada uno de los pasos seguidos. Si el plan está bien concebido, su realización es factible, y si además se poseen los conocimientos y el entrenamiento necesario, debería ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos. Si aparecen dificultades, se tendrá que regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo.

Por su parte, Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) resalta la importancia de contar con un buen repertorio de estrategias para la resolución de problemas; sin embargo, advierte que es necesario tener presente que las reglas heurísticas no son infalibles y el éxito de su aplicación depende mucho de la experiencia, juicio y buen sentido de quien las use.

Para analizar las estrategias empleadas por los estudiantes, retomamos la división propuesta por Rizo y Campistrous, (1999) en dos grandes categorías: reflexivas e irreflexivas. Es importante advertir que las respuestas no fueron excluyentes, es decir, los alumnos utilizaron más de una estrategia reflexiva o irreflexiva en la resolución de problemas. En casos particulares, como el problema de *Variación proporcional*, llegaron a combinar ambas. El siguiente cuadro presenta el porcentaje de alumnos que utilizó cada uno de este tipo de estrategias.

TABLA 22. % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO QUE UTILIZÓ ESTRATEGIAS REFLEXIVAS E IRREFLEXIVAS

Problemas	Estrategias reflexivas	Estrategias irreflexivas
Números, relaciones y operaciones	68,9	48,7
Resolución de problemas	53,4	51,4
Medición y geometría	38,3	69,2
Incidencia de uso	53,5	56,4

De acuerdo con la tabla N°22, las estrategias reflexivas usadas por los estudiantes de 4to. año básico son mayores en el área de números, relaciones y operaciones y resolución de problemas que las estrategias irreflexivas, pero éstas son mayores en el área de medición y geometría.

TABLA 23 % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE UTILIZÓ ESTRATEGIAS REFLEXIVAS E IRREFLEXIVAS

Problemas	Estrategias reflexivas	Estrategias irreflexivas
Números, relaciones y operaciones	60,5	25,3
Resolución de problemas	49,2	53,4
Medición y geometría	35,5	72,6
Incidencia de uso	48,4	50,3

Se observa en la tabla N°23 que los estudiantes de quinto año básico presentan una incidencia de uso de las estrategias reflexivas menor respecto a los estudiantes de cuarto año básico en las mismas áreas de números, resolución de problemas y medición-geometría y mayor uso de las estrategias irreflexivas a excepción de números, relaciones y operaciones en que es menor su uso respecto a los estudiantes de 4to. año básico.

TABLA 24. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO QUE UTILIZÓ ESTRATEGIAS REFLEXIVAS E IRREFLEXIVAS

Probl.emas	Estrategias reflexivas	Estrategias irreflexivas
Números fraccionarios	64,3	33,2
Variación proporcional	42,5	57,3
Perímetros, áreas ,figuras geométricas	32,1	67,7
Tratamiento de la información	75,8	12,4
Incidencia de uso	71,5	54,6

En el caso de sexto año básico, la incidencia de las estrategias reflexivas es mayor que en los cursos de cuarto y quinto año (71,5%) y las estrategias irreflexivas se concentran mayormente en los problemas de Perímetros, áreas ,figuras geométricas, lo mismo que en los casos de cuarto y quinto año básico. Esto indica que los estudiantes en general, presentan menores recursos estratégicos en el tema de geometría y luego en resolución de problemas y variación proporcional.

6.5. Estrategias reflexivas

Una de las motivaciones de este estudio fue conocer las estrategias reflexivas más utilizadas por los alumnos e indagar si existe alguna relación entre éstas y la resolución exitosa de los problemas. También se valoró si los alumnos eran capaces de intentar nuevos caminos al percatarse de que el diseño elegido era erróneo; es decir, la flexibilidad de pensamiento expresada en la capacidad de trazar varias formas posibles de llegar a la solución

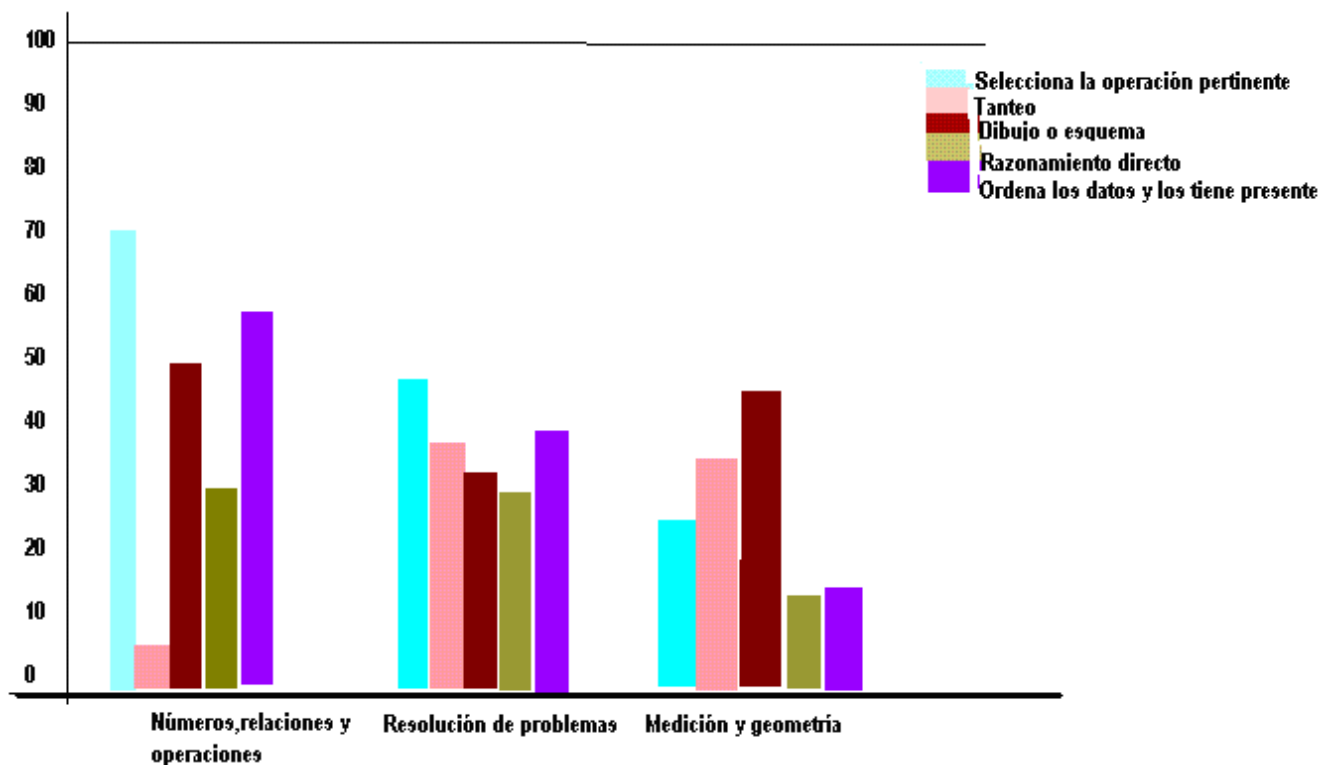
Las respuestas de los alumnos, se clasificaron en las siguientes estrategias reflexivas:

1. Selecciona la operación pertinente según la pregunta.
2. Propone un número y su comprobación para encontrar la solución. Tanteo.

3. Diseña un dibujo o esquema para comparar los datos y encontrar la solución. Conteo directo previa modelación.
4. Razonamiento directo: procesamiento inductivo que se apoya en el uso del cálculo mental.
5. Ordena los datos y los tiene presentes en la resolución, no borra los datos.

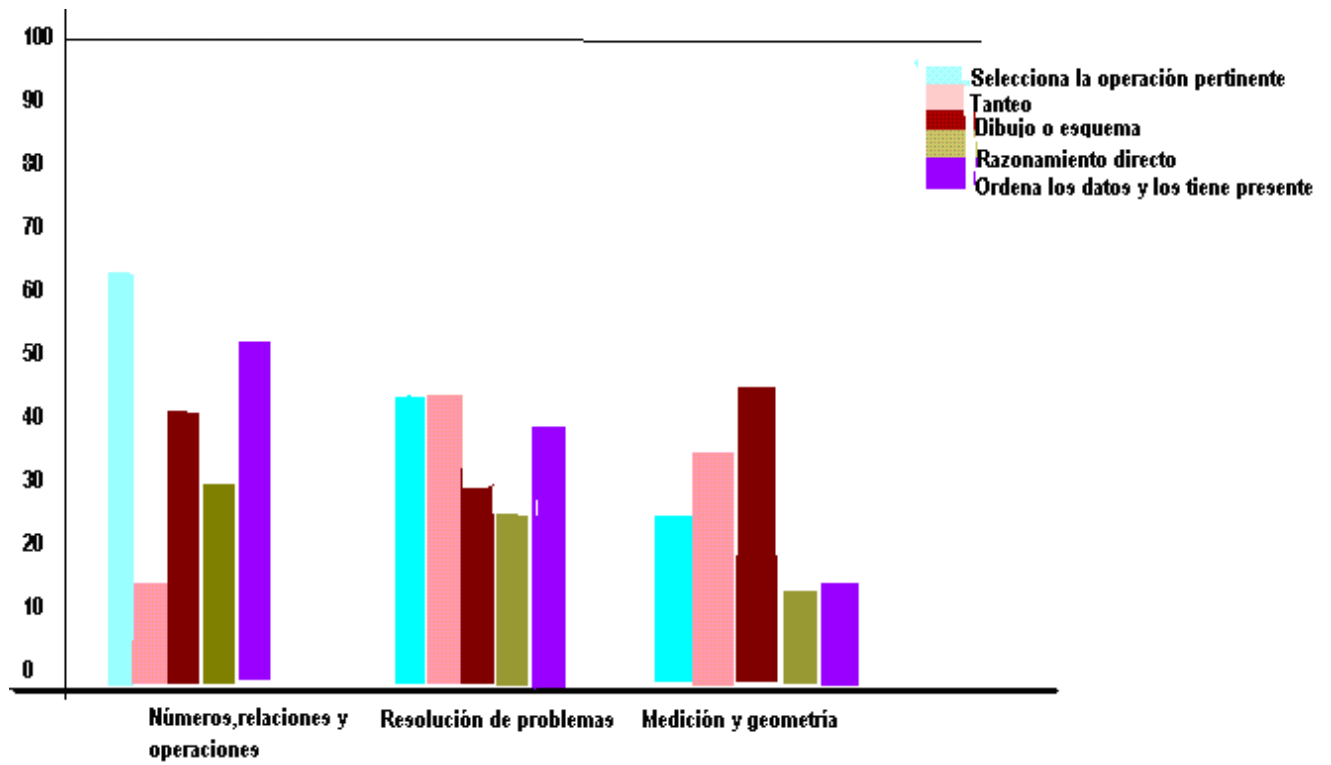
Dado que los problemas analizados son de diferente naturaleza, las estrategias de resolución también lo fueron. Tales diferencias pueden apreciarse en la gráfica siguiente donde se presenta la frecuencia con la que se usaron las diferentes estrategias en cada problema. Cabe destacar que en esta sección también era posible que los niños utilizaran más de una estrategia a la vez, por lo tanto las respuestas no son excluyentes.

GRÁFICA 13 . % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO SEGÚN ESTRATEGIAS REFLEXIVAS UTILIZADAS



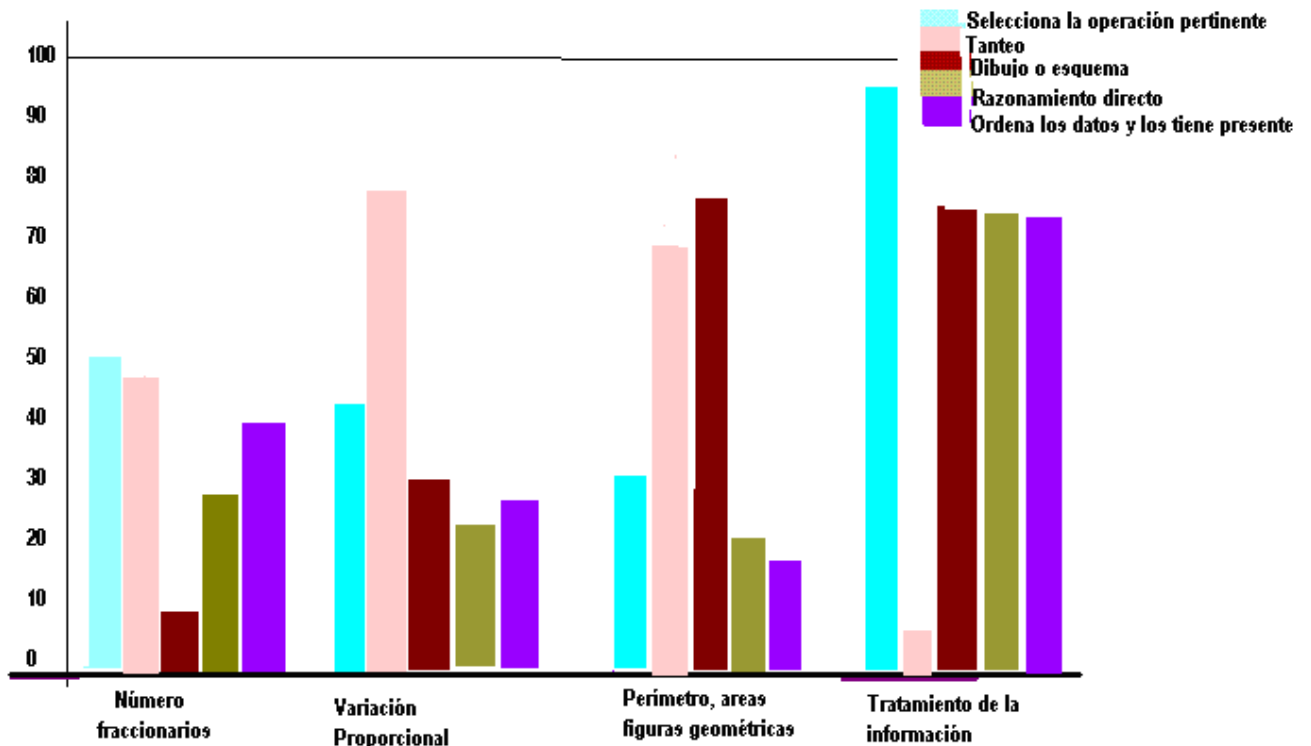
En el caso de los estudiantes de cuarto año básico, se emplean principalmente las estrategias reflexivas de selección de operaciones pertinentes en números, relaciones y operaciones y resolución de problemas y la estrategia de dibujo en medición y geometría lo cual es muy atinente

GRÁFICA 14. % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO SEGÚN ESTRATEGIAS REFLEXIVAS UTILIZADAS



En quinto año básico, la estrategia más utilizada es igualmente de selección de la operación pertinente para las áreas de numeración, relaciones y operaciones, en tanto que empatan las estrategias de seleccionar la operación pertinente y tanteo en el área de resolución de problemas. Similar actividad desarrollan los alumnos de cuarto y quinto año básico en el uso de las estrategias de dibujo o esquema para el área de medición y geometría.

GRÁFICA 15. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO SEGÚN ESTRATEGIAS REFLEXIVAS UTILIZADAS



Los alumnos de sexto año básico, como se puede apreciar en la gráfica 15, emplearon mayormente la estrategia de Tanteo y *Seleccionar la operación pertinente según la incógnita* en casi todos los problemas. La excepción se presenta en torno a *Perímetros, áreas y figuras geométricas*, donde la más frecuente fue el *diseño de un dibujo o esquema*.

El ejemplo siguiente recupera el procedimiento utilizado por una niña para resolver el problema de *Tratamiento de la información*. Se puede advertir que seleccionó la operación adecuada –en este caso la suma– para comparar y analizar la proposición que presenta información verdadera.

ILUSTRACIÓN 6. ESTRATEGIA REFLEXIVA: SELECCIONA LA OPERACIÓN PERTINENTE

10. A la población joven de cierto estado, que representa el 56 %, se le aplicó una encuesta sobre las actividades que realizan en su tiempo libre, de la cual se desprendió esta tabla:

2220
1200
3420
1800
1500
3300

Actividades	Frecuencia de preferencias en miles	Porcentaje de jóvenes respecto al total de la población
Ver TV o cine	2220	18.5 %
Leer	1200	10 %
Escuchar música	1800	15 %
Hacer deporte	1500	12.5 %

¿Cuál de las siguientes opciones presenta información verdadera con respecto a la tabla anterior?

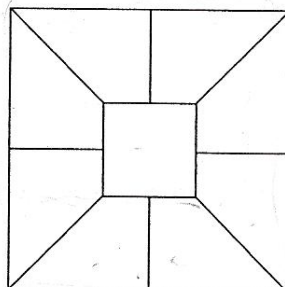
- A) La mayoría de los jóvenes prefiere leer o hacer deporte
- B) La actividad que prefieren los jóvenes en mayor medida es escuchar música
- C) Los jóvenes que prefieren leer y escuchar música son más que los que prefieren ver TV o cine y hacer deporte
- D) Los jóvenes que prefieren leer y ver TV o cine son aproximadamente los mismos que prefieren escuchar música y hacer deporte

Al mismo tiempo, se advierte que las estrategias menos usadas fue el de *Razonamiento directo*. La estrategia de tanteo es considerada una de las más importantes para resolver problemas y hacer matemáticas (Plya, 1965) por lo que los maestros y autoridades deberían estar más atentos a esta estrategia.

Por otra parte, se podría pensar que el escaso empleo del *Razonamiento directo*, que supone un razonamiento lógico basado en un principio inductivo (Valle, Juárez y Guzmán, 2007), se debe a que requiere una mayor madurez del pensamiento formal que pudiera esperarse para niveles superiores al 6to grado. Sin embargo, advertimos que el tipo de problema pareció influir en la selección de dicha estrategia, ya que en los problemas de *Variación proporcional* y *Perímetros, áreas y figuras geométricas* los alumnos podían encontrar visualmente las relaciones entre los datos y, a partir de estas relaciones particulares, llegar a la respuesta de manera directa. El siguiente es un ejemplo para el tema de geometría:

ILUSTRACIÓN 7. ESTRATEGIA REFLEXIVA: RAZONAMIENTO DIRECTO

14. El cuadrado de la figura está dividido en 9 partes de igual área. Si el perímetro del cuadrado exterior es de 24 cm ¿cuánto mide el lado del cuadrado interior?



- ☒ A. 2 cm
 B. 3 cm
 C. 4 cm
 D. 6 cm

Al entrevistar a este niño, explicó que lo primero que hizo fue calcular cuánto medía un lado del cuadrado grande a partir del dato de su perímetro, para ello mentalmente calculó “24 entre 4 es 6”; y mediante la exploración visual se percató de que el lado del cuadro interior medía una tercera parte, razón por la cual seleccionó la alternativa A) 2 cm.

El análisis de la información sobre el uso de estrategias en cada problema contra el porcentaje de respuestas correctas se muestra en el cuadro siguiente.

TABLA 25 . % DE RESPUESTAS CORRECTAS DE CUARTO AÑO BASICO SEGÚN ESTRATEGIA REFLEXIVA UTILIZADA

Problema	Selecciona la operación pertinente	Tanteo	Diseña un dibujo o esquema	Razonamiento directo	Ordena los datos y los tiene presentes
Números, relaciones y operaciones	70	5	49	29	56
Resolución de problemas	48	47	30	29	47
Medición y geometría	25	20	48	18	19

Las estrategias con mayor acierto fueron selección de operaciones pertinentes en problemas de números, relaciones y operaciones (70%) y ordenar los datos (56%) lo cual representa a 78% y 58% de los alumnos. En la resolución de problemas las estrategias más usadas fueron igualmente la selección de operaciones pertinentes (48%) seguido de ordenación de datos y tanteo con 47%, representando a una población de 48%, 38% y 37% respectivamente. En medición la estrategia más usada fue la de diseñar un dibujo (48%) reflejando a un 48% de los alumnos.

TABLA 26. % DE RESPUESTAS CORRECTAS DE QUINTO AÑO BASICO SEGÚN ESTRATEGIA REFLEXIVA UTILIZADA

Problema	Selecciona la operación pertinente	Tanteo	Diseña un dibujo o esquema	Razonamiento directo	Ordena los datos y los tiene presentes
Números, relaciones y operaciones	63	12	40	29	50
Resolución de problemas	47	47	32	27	45
Medición y geometría	27	58	20	17	18

Las estrategias con mayor acierto fueron selección de operaciones pertinentes en problemas de números, relaciones y operaciones (63%) y ordenar los datos (62%) lo cual representa a 50% de los alumnos. En la resolución de problemas las estrategias más usadas fueron igualmente la selección de operaciones pertinentes y tanteo, ambos con 47%, representando a una población de 45%. En medición y geometría, la estrategia más usada fue la de tanteo (58%) y seleccionar las operaciones pertinentes (38%) reflejando a un 25% de los alumnos.

TABLA 27. % DE RESPUESTAS CORRECTAS DE SEXTO AÑO BASICO SEGÚN ESTRATEGIA REFLEXIVA UTILIZADA

Problema	Selecciona la operación pertinente	Tanteo	Diseña un dibujo o esquema	Razonamiento directo	Ordena los datos y los tiene presentes
Números fraccionarios	50	12	86	78	77,8
Variación proporcional	78	60	56,4	45,3	54,8
Perímetros, áreas, figuras geométricas	42	73,7	75,3	55	48,3
Tratamiento de la información	94	100	78,4	67	78,2

En el caso del problema sobre *Números fraccionarios* se observa que las estrategias con mayor índice de aciertos, fueron: el *Apoyo en un dibujo* y el *Razonamiento directo* (86% y 78%); sin embargo, éstas fueron utilizadas por una mínima proporción de alumnos (4.8%) –ver gráfica 15-. Por el contrario, *Ordenar los datos y tenerlos presentes*, así como *Seleccionar la operación adecuada* fueron estrategias a las que recurrieron una mayor cantidad de niños (40 % y 50%) y es destacable que alcanzaron un índice de aciertos muy significativo (77,8% y 86% respectivamente). Es preciso advertir que en este problema conocer el algoritmo de la multiplicación y la resta de fracciones era un recurso decisivo.

En el problema de *Variación proporcional* las estrategias más utilizadas fueron: *Seleccionar la operación pertinente* (40%), *Diseño de un dibujo o esquema* (30%) y *Tanteo* (78%). De éstas la que tuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas fue la primera o (78%) –ver gráfica 5-. Conviene aclarar que para la resolución de este problema los alumnos tenían que realizar varias operaciones, una de ellas era el cálculo de porcentaje mediante una regla de tres.

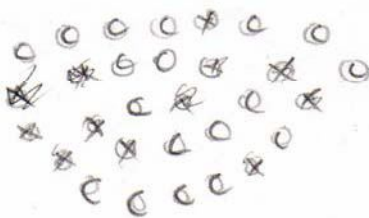
Al parecer, este problema era propicio para la combinación de estrategias. Como se mencionó al principio de esta sección, el uso de éstas no era excluyente. En este caso, la combinación más utilizada y que tuvo resultados favorables fue la de

Apoyarse en un dibujo o esquema y Seleccionar la operación adecuada. Ejemplo:

ILUSTRACIÓN 8. COMBINACIÓN DE ESTRATEGIAS REFLEXIVAS

4. Luisa hizo un arreglo floral con 30 flores. Ella colocó tres claveles blancos por cada dos margaritas. ¿Qué porcentaje de margaritas utilizó para el arreglo?

- A. 15%
- B. 30%
- ☒ C. 40%
- D. 60%



$$\begin{array}{r} 30 \quad 100 \\ 12 \\ \hline 40 \\ 3 \overline{) 120} \end{array}$$

Como puede observarse, el alumno elaboró un dibujo para encontrar el número de margaritas, posteriormente procedió a calcular el porcentaje de ellas en el arreglo y de la combinación de ambas estrategias obtuvo el resultado correcto.

El siguiente problema analizado, donde los alumnos encontraron gran dificultad y sólo 57.9% procedió reflexivamente, fue el de *Áreas y cuerpos geométricos*. Aquí 8 de cada 10 niños *seleccionaron la operación apropiada para el texto* y casi tres cuartas partes de ellos (74.1%) tuvieron éxito. Vale la pena señalar que la proporción de niños que se apoyó en el *Diseño de un dibujo o esquema* fue pequeña (18.2%), pese a que el problema era geométrico. Sin embargo, quienes lo hicieron obtuvieron un 83.3% de respuestas correctas. El *Tanteo* y el *Razonamiento directo* fueron empleados por sólo dos niños y ambos llegaron a la solución correcta.

En contraste con los problemas anteriores, el de *Tratamiento de la Información* tuvo un nivel de dificultad medio y una alta incidencia de estrategias reflexiva (96.5%). Nueve de cada diez, *Seleccionó la operación adecuada* y de ellos un 70% contestó correctamente. Sólo 14.5% decidieron *Ordenar los datos y tenerlos presentes* en la resolución del problema, y entre ellos el porcentaje que obtuvo respuestas correctas fue muy alto (87.5%)

Finalmente, en el problema de *Perímetros, áreas y figuras geométricas*, que fue el más difícil, tuvo la menor incidencia de estrategias reflexivas (52.6%). La estrategia con más respuestas correctas (100%) fue la de *Proponer un número y su comprobación para encontrar la solución o Tanteo*, sin embargo, solamente 13.3% de los niños la utilizaron. *Ordenar los datos y tenerlos presentes* fue también una estrategia exitosa (83.3%), pero sólo 2 de cada 10 niños recurrieron a ella.

La estrategia con mayor porcentaje de uso en este problema fue la de *diseñar un dibujo* (53.3%) y 8 de cada 10 niños que la emplearon contestaron correctamente.

En segundo lugar, se ubica la *selección de la operación pertinente* (40%) y tuvo un 75% de aciertos. Es decir, estas dos estrategias que fueron las más frecuentes condujeron a aciertos en proporciones muy importantes de estudiantes; aunque las más efectivas fueron las mencionadas en el párrafo anterior.

En fin, como se ha dicho, la estrategia predilecta entre los niños es la de *Seleccionar la operación pertinente según la incógnita*. Ello podría ser el reflejo de la creencia de los alumnos de que existe una

única manera correcta de resolver los problemas y – como lo señaló Schoenfeld- usualmente es la regla que el profesor da en la clase.

Además, agregaríamos, que tal solución necesariamente pasa por la realización de operaciones, lo que concuerda con el hallazgo de Rizo y Campistrous (1999) acerca de la “tendencia ejecutora” presente en el desempeño de los alumnos de primaria.

También señalamos que no siempre ésta es la estrategia más efectiva para resolver cualquier tipo de problema. Su mayor efectividad se constató en el problema de Variación proporcional, pero fue menor en *Números fraccionarios* donde el *Diseño de un dibujo* y el *Razonamiento directo* tuvieron más éxito. Esto nos lleva a afirmar, la conveniencia de estimular el desarrollo de un mayor repertorio de estrategias entre los alumnos, lo que puede conseguirse mediante una oferta variada de problemas diversos en datos, condiciones e incógnitas. En nuestro caso, los problemas que atrajeron el uso de una mayor variedad de estrategias fueron los de *Variación proporcional* y *Geometría*.

6.6. Estrategias irreflexivas

Como se señaló en párrafos arriba, entendemos por estrategias irreflexivas aquellos procedimientos carentes de sentido, en el que los estudiantes ejecutan las operaciones, o buscan la solución, sin realizar un análisis previo de la situación planteada.

El siguiente cuadro presenta el porcentaje de alumnos de acuerdo con el tipo de estrategias irreflexivas utilizadas en cada uno de los problemas.

TABLA 28 . % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO DE ACUERDO CON EL TIPO DE ESTRATEGIAS IRREFLEXIVAS UTILIZADAS

Problemas	Adivina la operación o formula y realiza operaciones mecánicamente	Busca palabras claves pero no logra comprender el significado del texto	Contesta sin hacer operación alguna	Borra las operaciones que realiza	Selecciona la opción mas cercana al resultado obtenido
Números, relaciones y operaciones	28,5	25,3	7,9	10,6	12,4
Resolución de problemas	46,7	23,8	12,8	9,3	22,4
Medición y geometría	57,3	32,9	32,6	13,8	33,7

TABLA 29. % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO DE ACUERDO CON EL TIPO DE ESTRATEGIAS IREFLEXIVAS UTILIZADAS

Problemas	Adivina la operación o formula y realiza operaciones mecánicamente	Busca palabras claves pero no logra comprender el significado del texto	Contesta sin hacer operación alguna	Borra las operaciones que realiza	Selecciona la opción mas cercana al resultado obtenido
Números, relaciones y operaciones	27,5	21,6	9,4	12,6	17,4
Resolución de problemas	29,5	22,3	11,7	15,8	21,7
Medición y geometría	47,8	38,5	29,4	27,3	45,6

Tanto el porcentaje de alumnos de cuarto año básico como de quinto año básico, las estrategias irreflexivas mas recurrentes son las de adivinar la operación o formular y realizar operaciones mecánicamente en números, relaciones y operaciones y en la resolución de problemas se repite igualmente esta estrategia irreflexiva como sucede con los problemas de medición y geometría.

TABLA 30. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO DE ACUERDO CON EL TIPO DE ESTRATEGIAS IREFLEXIVAS UTILIZADAS

Problemas	Adivina la operación o formula y realiza operaciones mecánicamente	Busca palabras claves pero no logra comprender el significado del texto	Contesta sin hacer operación alguna	Borra las operaciones que realiza	Selecciona la opción mas cercana al resultado obtenido
Números fraccionarios	29,5	16,7	2,5	11,6	7,4
Variación proporcional	43,8	32,7	12,6	27,3	28,3
Perímetros, áreas ,figuras geométricas	41,7	34,5	28,3	33,2	29,2
Tratamiento de la información	0,0	8,5	2,3	8,4	7,4

La estrategia irreflexiva más recurrente fue la de *adivinar la operación y su realización de forma mecánica*, es decir, sin reflexionar sobre lo que están haciendo. Esto corrobora la “tendencia ejecutora” que ya hemos advertido en la conducta de los estudiantes principalmente en el área de perímetros, áreas y figuras geométricas y variación proporcional. El siguiente es un ejemplo de esta forma de proceder:

ILUSTRACIÓN 9. ESTRATEGIA IRREFLEXIVA: ADIVINAR LA OPERACIÓN

3. José compró 62 quesos para vender, 30 eran Oaxaca y 32 Manchego. Si le quedaron $\frac{2}{6}$ de Oaxaca y $\frac{2}{8}$ de Manchego, ¿cuántos quesos vendió?

$$\begin{array}{r} 24 \\ 21 \overline{) 48} \\ \underline{08} \\ 14 \\ 21 \overline{) 28} \end{array}$$

- A. 18
B. 20
C. 44
D. 49

$$62 - \frac{2}{6} \times 30 + \frac{2}{8} \times 32 = ?$$

$$\frac{16}{48} + \frac{12}{48} = \frac{28}{48}$$

$$\frac{62}{1} - \frac{7}{12} = ?$$

$$\frac{744}{12} - \frac{7}{12} = \frac{737}{12}$$

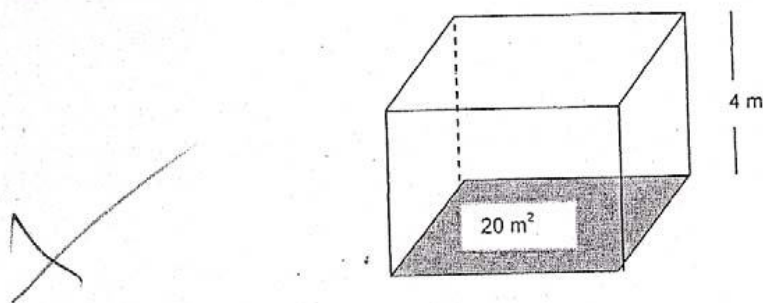
... los clavos blancos por cada dos

En segundo lugar se encuentra la estrategia irreflexiva de buscar palabras claves sin comprender el significado del texto y *borrar las operaciones que realizaron*, impidiendo detectar dónde se presenta el error del procedimiento seguido.

En los últimos lugares, se observó la estrategia irreflexiva de *seleccionar la opción más cercana al resultado obtenido* y la búsqueda de palabras claves, pero sin comprender el significado del texto. Esto fue más notorio en el problema de Áreas y cuerpos geométricos, el siguiente es un ejemplo:

ILUSTRACIÓN 10. ESTRATEGIA IRREFLEXIVA: SELECCIONA LA OPERACIÓN MÁS CERCANA AL RESULTADO

9. Pedro construirá una bodega de lámina, en forma de prisma cuadrangular, como se muestra a continuación:



Si el área del piso será de 20 m^2 y tendrá una altura de 4 metros, ¿cuánto necesitará comprar de lámina para construir el techo y las paredes sin tomar en cuenta el piso?

- A. 32 m^2
B. 60 m^2
C. 76 m^2
D. 92 m^2

Al entrevistar al niño, explicó que multiplicó el piso (20 m^2) por la altura (4 m), lo que arroja como resultados 80 m^2 , pero como no aparece esta opción, seleccionó la más cercana esto es C) 76 m^2 .

La posibilidad de que los estudiantes que utilizan estrategias irreflexivas solucionen correctamente las situaciones planteadas depende del azar. Sin embargo, al hacer este análisis observamos que, en términos generales, una mayor proporción de estudiantes lo hizo de forma incorrecta.

TABLA 31. % DE ALUMNOS DE CUATO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON INCORRECTAMENTE DE ACUERDO CON LA UTILIZACIÓN DE ESTRATEGIAS IRREFLEXIVAS

Problemas	Adivina la operación o formula y realiza operaciones mecánicamente	Busca palabras claves pero no comprende el significado del texto	Contesta sin hacer operaciones alguna	Borra las operaciones que realiza	Selecciona la opción mas cercana al resultado obtenido
Números, relaciones y operaciones	19,8	21,7	12,5	16,4	12,3
Resolución de problemas	38,6	39,4	33,9	43,2	45,8
Medición y geometría	75,3	48,2	42,5	57,3	49,6

Los estudiantes de 4to. año básico, presentan mayor uso de estrategias irreflexivas en el área de resolución de problemas y medición-geometría, empleando casi todas las estrategias incorrectas para estas áreas.

TABLA 32. % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON INCORRECTAMENTE DE ACUERDO CON LA UTILIZACIÓN DE ESTRATEGIAS IRREFLEXIVAS

Problemas	Adivina la operación o formula y realiza operaciones mecánicamente	Busca palabras claves pero no comprende el significado del texto	Contesta sin hacer operaciones alguna	Borra las operaciones que realiza	Selecciona la opción mas cercana al resultado obtenido
Números, relaciones y operaciones	17,9	21,4	17,3	19,4	13,7
Resolución de problemas	49,8	28,2	28,9	28,4	38,4
Medición y geometría	75,6	49,4	48,2	57,2	41,6

Los estudiantes de 5to. año básico, al igual que los estudiantes de 4to. año, usan todas las estrategias irreflexivas en las mismas áreas que los estudiantes de 4to. año básico, teniendo el mas alto puntaje la estrategia de adivinar las operaciones especialmente cuando se le presentan problemas con alternativas.

TABLA 33. % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON INCORRECTAMENTE DE ACUERDO CON LA UTILIZACIÓN DE ESTRATEGIAS IRREFLEXIVAS

Problemas	Adivina la operación o formula y realiza operaciones mecánicamente	Busca palabras claves pero no comprende el significado del texto	Contesta sin hacer operaciones alguna	Borra las operaciones que realiza	Selecciona la opción mas cercana al resultado obtenido
Números fraccionarios	61,5	0	0	54,5	100
Variación proporcional	82,4	66,7	71,4	78,6	100
Perímetros, áreas ,figuras geométricas	82,6	80	83,3	90	50
Tratamiento de la información	0	100	100	28.6	0

El mayor porcentaje de estudiantes de 6to. grado opta por las estrategias irreflexivas en toda su gama en el área de variación proporcional y perímetros-áreas-figuras geométrica. Por lo menos 8 de cada 10 alumnos que intentó adivinar la operación o fórmula y realizó las operaciones mecánicamente respondió incorrectamente los problemas de *Variación proporcional* y los de *Geometría*.

Entre 80% y el 100% de los estudiantes que buscaron palabras claves en los problemas de *Variación proporcional* y *Perímetros-área-figuras geométricas*, no comprendieron el significado del texto por lo que contestaron erróneamente. Sólo 3% de quienes siguieron esta misma estrategia en problemas de *Variación proporcional*, acertaron.

Entre 71.4 de los estudiantes que optaron por contestar sin hacer alguna operación, dejando al azar o a su buena intuición actuar, tuvieron malas sus respuestas.

Sólo a la totalidad de los alumnos que en el problema de *Números fraccionarios* emplearon dicha estrategia la suerte estuvo a su favor.

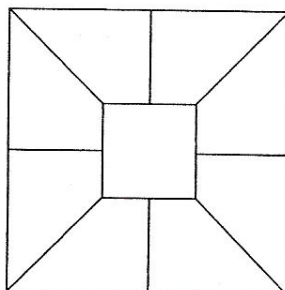
La respuesta de los estudiantes que, al parecer, analizaron la situación y realizaron las operaciones que les permitía resolver el problema, pero que borraron dicho procedimiento, varía dependiendo del tema. La proporción de estudiantes que respondió correctamente va de 10 a 51%, mientras que el porcentaje de los que lo hicieron de manera incorrecta se ubica entre el 28.6 y el 90%. Esta estrategia no permite detectar cuál fue el principal error cometido por el estudiante en el procedimiento seguido.

Todos los estudiantes que seleccionaron la opción más cercana al resultado obtenido en sus operaciones, en los problemas de *Números fraccionarios* y *Variación proporcional* tuvieron mal resultado, mientras que en el de *Áreas y cuerpos geométricos*, así como en el de *Tratamiento de la información* contestaron adecuadamente. En el tema de *Perímetros, áreas y figuras geométricas* el porcentaje de estudiantes con respuestas correctas e incorrectas se divide en partes iguales.

Vale la pena retomar un ejemplo en el que a partir de una estrategia irreflexiva un estudiante puede llegar a la respuesta correcta. El siguiente es uno:

ILUSTRACIÓN 11. ESTRATEGIA IRREFLEXIVA QUE CONDUCE A UN RESULTADO CORRECTO

14. El cuadrado de la figura está dividido en 9 partes de igual área. Si el perímetro del cuadrado exterior es de 24 cm ¿cuánto mide el lado del cuadrado interior?



- A. 2 cm
B. 3 cm
C. 4 cm
D. 6 cm

$$\begin{array}{r} 2.66 \\ 9 \overline{) 240} \\ \underline{18} \\ 60 \\ \underline{54} \\ 60 \end{array}$$

En este caso se conjugan serios errores, pero debido al estilo de la prueba –opción múltiple– la alumna sale bien librada. En primer lugar, confunde los conceptos de perímetro y área, al dividir 24 –que es el perímetro– por 9 –que corresponde a las partes iguales en las que se divide el área de la figura. Además, al buscar la opción más cercana a su resultado selecciona A) 2 cm, cuando siguiendo esta lógica el valor más cercano sería B) 3 cm. Cabe señalar que este procedimiento no fue poco frecuente.

6.7. Verificación del resultado

La última de las variables planteadas en este estudio fue la relativa a la *visión retrospectiva*. La quinta pregunta de la entrevista, ¿verificaste si tenías algún error?, estaba enfocada a obtener información al respecto. Los estudiantes de cuarto año básico que verificaron el proceso realizado fue mayormente realizada en el área números-relaciones-operaciones (67%), seguido del área resolución de problemas y lo que menos se verifica es el área de medición-geometría, el 71% de los estudiantes no realiza verificación de esta área.

TABLA 34 . % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO QUE VERIFICARON SUS RESPUESTAS

Problema	Verifica el proceso realizado e identifica el error	No verifica el proceso realizado
Números, relaciones y operaciones	67,3	32,7
Resolución de problemas	39,6	60,4
Medición y geometría	28,2	71,8

TABLA 35 . % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE VERIFICARON SUS RESPUESTAS

Problema	Verifica el proceso realizado e identifica el error	No verifica el proceso realizado
Números, relaciones y operaciones	65,4	34,6
Resolución de problemas	34,7	65,3
Medición y geometría	30,7	69,3

El porcentaje de alumnos de 5to. año básico que realiza verificación del proceso e idéntica errores llega al 65% en el área números-relaciones-operaciones, y le siguen en la misma tónica, el 34% de los estudiantes en el área resolución de problemas. Mas del 69% de los estudiantes no realiza verificación en el tema de medición-geometría. La mayor parte de los estudiantes que no realiza verificación de sus procesos de resolución de problemas corresponde a los estudiantes del grupo con bajo rendimiento académico (73%) ubicados en las diversas regiones del país.

TABLA 36 . % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BASICO QUE VERIFICARON SUS RESPUESTAS

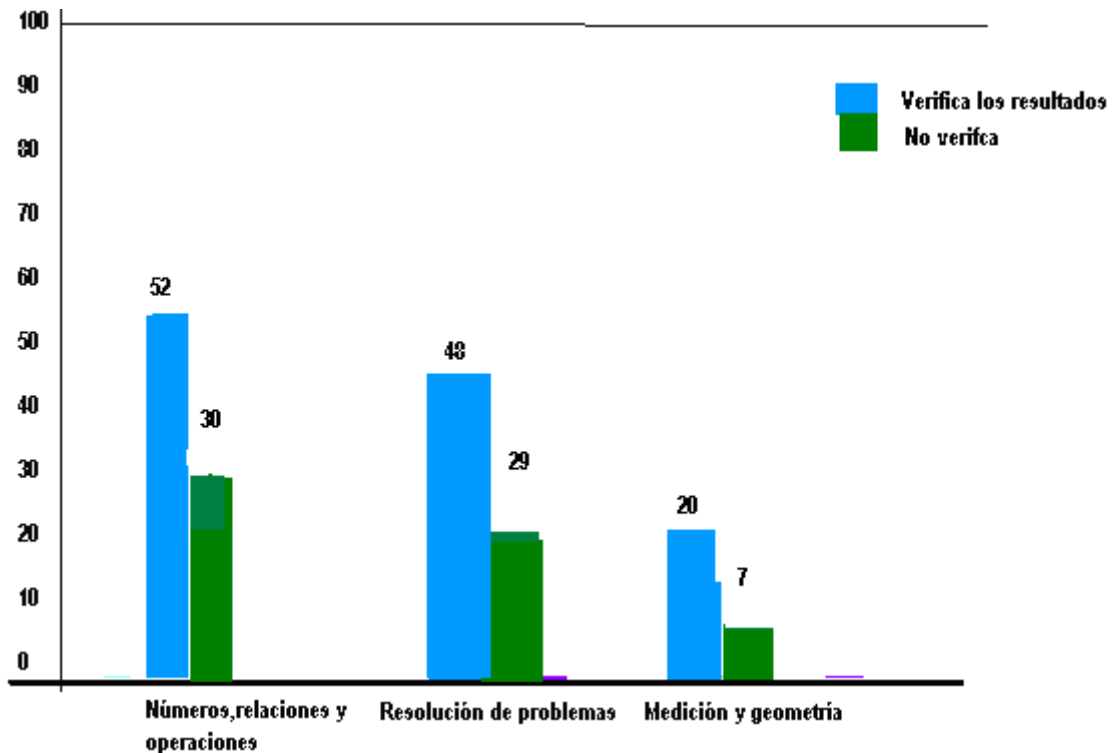
Problema	Verifica el proceso realizado e identifica el error	No verifica el proceso realizado
Números fraccionarios	47,2	52,8
Variación proporcional	31,4	68,6
Perímetros, áreas ,figuras geométricas	28,7	71,3
Tratamiento de la información	79,2	20,8

Adicionalmente, se observó que el porcentaje de estudiantes que afirmó haber verificado sus respuestas, fue disminuyendo de acuerdo al orden progresivo de la prueba. Es decir, para los primeros problemas una mayor proporción de estudiantes se detuvo a revisar el procedimiento seguido, pero conforme fueron avanzando esta proporción disminuyó.

La tabla Nª 36, en el caso de los estudiantes de sexto año básico, informa que en los problemas más complejos como son números fraccionarios, solo el 47% de los estudiantes realiza verificación en esta área, seguido de 31% en el área de variación proporcional. En tanto que en el área de tratamiento de la información, que es menos compleja, el 79% de los estudiantes realiza verificación

Para conocer si la *Visión retrospectiva* guardaba alguna relación con el acierto de las respuestas se realizó un cruce entre ambas variables, los datos se presentan en los siguientes gráficos.

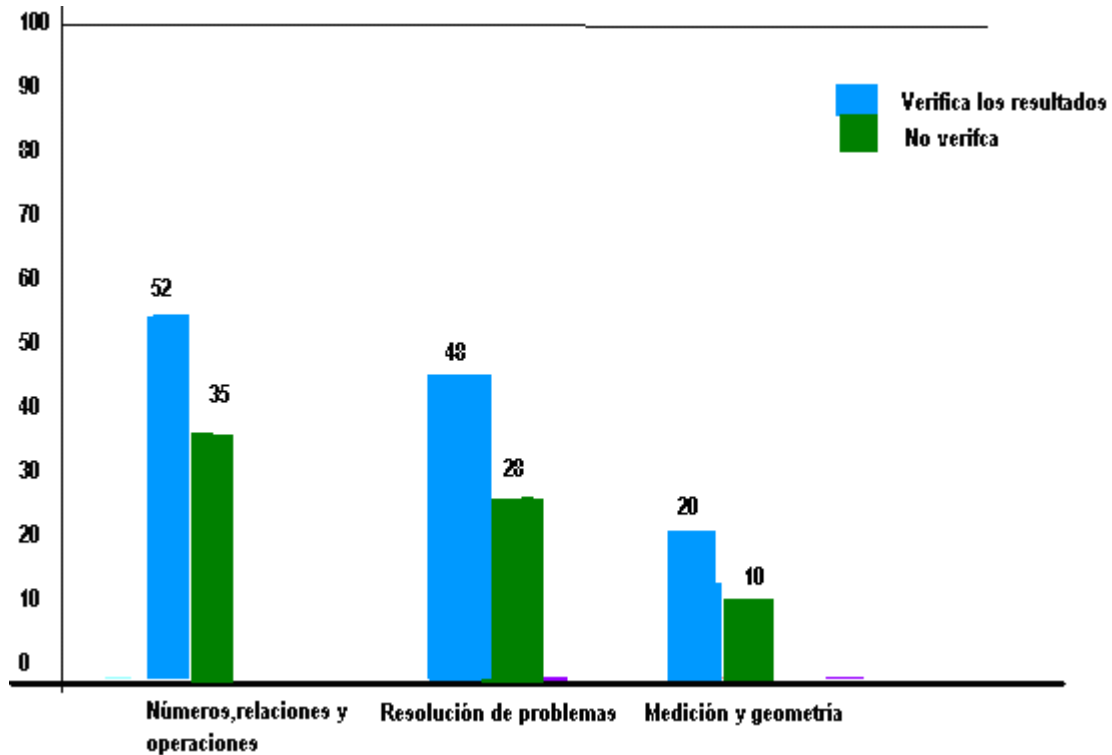
GRÁFICA 16 % DE ALUMNOS DE CUARTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU VISIÓN RETROSPECTIVA



En el caso de los alumnos de cuarto año básico la diferencia mas importante entre verificar las respuestas y no hacerlo, se encuentra en número, operaciones y relaciones, donde el 52% de los estudiantes que al verificar sus resultados contestaron acertadamente, mientras que los estudiantes que no lo hicieron, solo el 30% acertó en sus respuestas. Lo mismo sucede en el área de resolución de problemas, donde el 48% de los estudiantes que realizaron verificación, acertaron sus respuestas correctas.

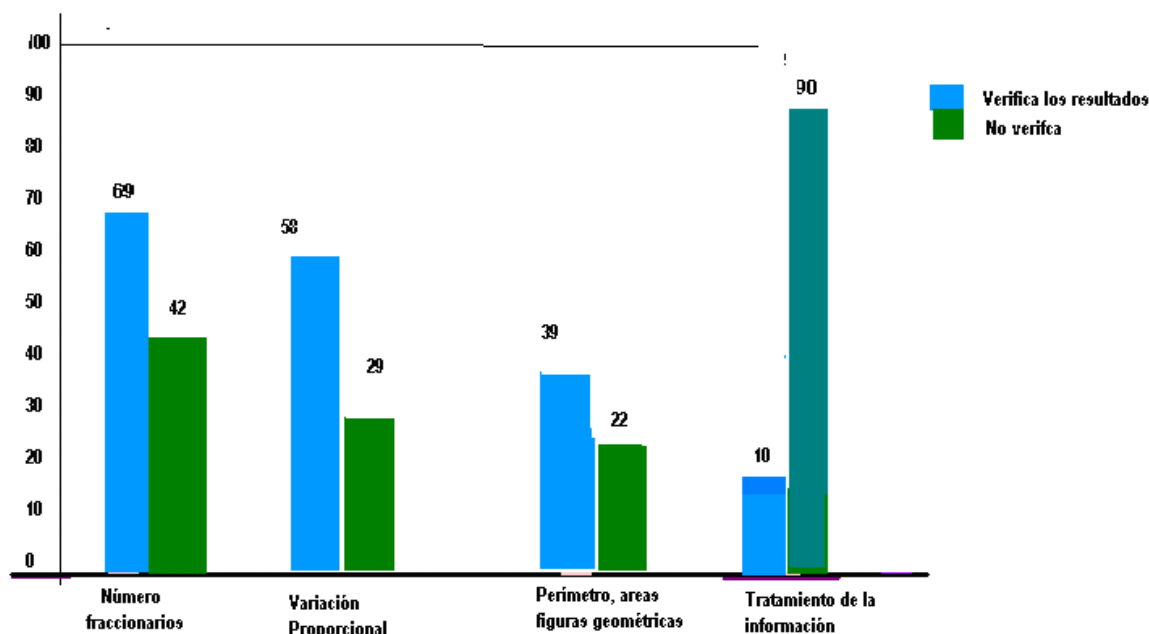
Los estudiantes que no verificaron fueron principalmente los estudiantes que presentaban menor rendimiento académico según su registro de notas anuales.

GRÁFICA 17 % DE ALUMNOS DE QUINTO AÑO BASICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU VISIÓN RETROSPECTIVA



El 52% de los estudiantes de quinto año básico que realizaron verificación, respondieron acertadamente sus problemas en el área de números-relaciones y operaciones, seguido por el 48% en el área de resolución de problemas. Un menor número hubo de estudiantes que verificaron sus procesos para resolver problemas en el área de medición-geometría que solo acertaron en un 28% en respuestas correctas.

GRÁFICA 18 % DE ALUMNOS DE SEXTO AÑO BÁSICO QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE DE ACUERDO CON SU VISIÓN RETROSPECTIVA



Como ya se mencionó, poco menos de la mitad de los alumnos realizó un ejercicio de visión retrospectiva sobre los problemas resueltos. Sin embargo, no deja de ser revelador que entre alumnos que sí verificaron sus respuestas, se concentra un porcentaje más alto de respuestas correctas que entre quienes no lo hicieron.

En el caso de los estudiantes de sexto año básico, la diferencia más significativa se encuentra en el problema de *Variación proporcional*, donde 58% de los alumnos que verificaron sus resultados contestaron correctamente, mientras que entre quienes no verificaron sus respuestas sólo un 29% acertó.

La importancia del proceso de verificación de resultados, se confirmó durante las entrevistas, donde muchos alumnos al explicar nuevamente el procedimiento que habían realizado, detectaron los errores que habían cometido en la prueba y que al no verificar sus respuestas pasaron por alto. Esto pone de relieve la importancia que tiene la revisión y retroalimentación de los exámenes con los alumnos, como un momento propicio para el aprendizaje; más allá de la simple comunicación de sus calificaciones.

Este aspecto es decisivo en cuanto a utilizar estrategias metacognitivas que facilita el cuestionamiento que el estudiante realiza sobre los procesos que está aplicando luego de poner en marcha un plan para resolver un problema.

6.8. Impacto de las diferentes variables en la solución del problema

Al estimar cuál de las variables -conocimientos previos, comprensión del problema, explicación del procedimiento y utilización de estrategias reflexivas- tiene mayor influencia en la resolución exitosa de los problemas, los resultados del análisis de regresión logística indican que la probabilidad de que los estudiantes respondan erróneamente *si no comprenden* el problema es muy alta en *Números fraccionarios* (98%) y *Perímetros, áreas y figuras geométricas* (96%). Es decir, del conjunto de variables, la comprensión del problema tiene un mayor peso en la correcta solución.

Al mismo tiempo, para el problema de *Perímetros, áreas y figuras geométricas*, existe una probabilidad del 87% de contestar erróneamente si no se emplea la estrategia reflexiva *elaboración de un dibujo o esquema*.

TABLA 37. NÚMEROS FRACCIONARIOS Y PERÍMETROS, ÁREAS Y FIGURAS GEOMÉTRICAS

Variables en la ecuación						
	B	E.T.	Wald	gl	Sig.	Exp (B)
Nº fraccionarios						
Paso 1(a) Comprensión del Problema (1)	-3,659	.769	17,493	1	.000	.021
Constante	2.493	.684	10,329	1	.002	11.300
Perímetros, áreas y fig. geométricas						
Paso 1(a) Comprensión del probl (1)	-3.208	.749	14.947	1	.000	.023
Constante	2.031	.692	6,301	1	.006	6.302
Paso 2(b) Comprensión del problem (1)	-3.493	.793	10.201	1	.002	.058
Estrategia reflexiva: Dibujo o Esquema (1)	-2.105	.750	4.302	1	.028	.126
Constante	2.503	1.593	8.693	1	.001	23.704

a Variable (s) introducida (s) en el paso 1: Comprensión del problema

b Variable (s) introducida (s) en el paso 2: estrategias reflexivas: dibujo o esquema.

* El resto de las variables no están en la ecuación.

En el problema de *Variación proporcional*, las variables que influyen en la correcta solución son el empleo de la estrategia reflexiva *Selecciona la operación pertinente*, la *Verificación del resultado* y el *Establecimiento de un plan donde justifica el sentido de sus acciones*. Los resultados estadísticos muestran que existe una alta probabilidad -entre el 85 y 96%- de que los alumnos que no hacen uso de estos pasos y estrategias, obtienen resultados erróneos.

TABLA 38. VARIACIÓN PROPORCIONAL Variables en la ecuación

		B	E:T.	Wald	gl	Sig.	Exp(B)
Paso 1(a)	Estrategia reflexiva: selección de la operación pertinente (a)	-2.503	.704	12.904	1	.000	.029
	Constante	2.406	.745	8.603	1	.003	8.000
Paso 2(b)	Estrategia reflexiva: selección de la operación pertinente (1)	-3,021	.899	11.558	1	.001	.049
	Verifica resultado (1)	-1.854	.747	6.166	1	.002	.048
	Constante	3.066	.912	11.294	1	.001	21.456
Paso 3©	Explica el procedimiento (1)	-1.934	.905	4.560	1	.033	.144
	Estrategia reflexiva: Selección de la operación pertinente (1)	-2.371	.977	5.887	1	.015	.093
	Verifica el resultado (1)	-2.356	.903	6.839	1	.009	.096

	Constante	3.796	1.147	10.949	1	.001	44.509
--	-----------	-------	-------	--------	---	------	--------

a Variable (s) introducida (s) en el paso 1: Estrategia reflexiva: Selección de la operación pertinente.

b Variable (s) introducida (s) en el paso 2: Verifica el resultado.

c Variable (s) introducida (s) en el paso 4: Explica el procedimiento.

El resto de las variables no están en la ecuación.

En el problema de *Áreas y cuerpos geométricos*, existe una probabilidad del 97% de fracasar si existe una carencia en los *conocimientos previos*. Esto reafirma, como se ha venido señalando, la importancia que tiene el manejo de los conceptos y nociones matemáticas para la correcta solución de este tipo de problemas.

TABLA 39. ÁREAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS Variables en la ecuación

		B	E.T.	Wald	gl	Sig.	Exp (B)
Paso 1(a)	Conocimientos previos (1)	-3.778	.819	21.604	1	.000	.023
	Constante	1.659	.596	9.239	1	.002	5.250

a Variable (s) introducida (s) en el paso 1: conocimientos previos.

* El resto de las variables no están en la ecuación.

En síntesis, de acuerdo con este análisis, en dos problemas –*Números fraccionarios y Perímetros, áreas y figuras geométricas*– la variable *comprensión* es la que tiene un mayor peso en la resolución acertada. Si los alumnos logran entender lo que se les plantea, existe una alta probabilidad de llegar al resultado correcto. Por su parte, en el caso de *Variación proporcional*, los estudiantes que no emplearon estrategias reflexivas, como el *diseño de un dibujo*, que *no verificaron* su respuesta y que no lograron *explicar* el procedimiento que siguieron, tienen una alta probabilidad de fracasar en la solución de este tipo de problemas. En el único problema donde los *conocimientos previos* determinan en mayor medida la probabilidad de éxito fue en el de *Áreas y cuerpos geométricos*.

7. CONCLUSIONES

Los hallazgos del estudio son útiles para responder algunas de las inquietudes que dieron lugar al mismo, pero también para abrir nuevas interrogantes. Nos propusimos comprender mejor por qué los alumnos fallan al resolver problemas

matemáticos y también qué fortalezas tienen frente a los mismos. Las siguientes tablas describe las frecuencias de utilización de los diferentes pasos del método y las estrategias empleadas.

TABLA 40.. PASOS DEL MÉTODO Y ESTRATEGIAS EMPLEADAS. Cuarto año básico

Problema	Conocimientos previos suficientes	Comprende	Traza un plan	Usa estrategias reflexivas	Verifica
Números, relaciones y operaciones	71	56	77,6	68,9	67,3
Resolución de problemas	45	41	57,8	53,4	39,6
Medición y geometría	39	32	38,4	38,3	28,2

TABLA 41. PASOS DEL MÉTODO Y ESTRATEGIAS EMPLEADAS. Quinto año básico

Problema	Conocimientos previos suficientes	Comprende	Traza un plan	Usa estrategias reflexivas	Verifica
Números, relaciones y operaciones	58	55	69,4	60,5	65,4
Resolución de problemas	40	39	53,2	49,2	34,7
Medición y geometría	38	31	30,6	38,5	69,3

TABLA 42.. PASOS DEL MÉTODO Y ESTRATEGIAS EMPLEADAS. Sexto año**básico**

Problema	Conocimientos previos suficientes	Comprende	Traza un plan	Usa estrategias reflexivas	Verifica
Números fraccionarios	68	49	69,4	64,3	47,,2
Variación proporcional	56	45	74,9	42,5	31,4
Perímetros, áreas ,figuras geométricas	39	30	89.2	32,1	28.7
Trtamiento de la información	72	75	43,2	75,8	79.2

El estudio reveló que los conocimientos previos son herramientas claves para el éxito en la resolución de problemas, especialmente en aquellos que demandan la aplicación de conceptos específicos –como los de geometría: área y perímetro-, en cuyo caso los vacíos conceptuales obstaculizaron la obtención de respuestas correctas. Nuestros resultados indican que, en torno a los problemas más difíciles, los alumnos que dominaban los conceptos y nociones matemáticas necesarias mostraron éxito en la resolución de los mismos, llegando a reportar más de 74 puntos porcentuales de diferencia con quienes se hallaban en la situación contraria.

Estos hallazgos, coinciden con los reportados por Solaz-Portolés y Sanjosé (2008) donde destaca la enorme influencia que el conocimiento conceptual tiene en la resolución correcta de los problemas. Retomando a Lang de Silveira y sus colaboradores, estos autores afirman que el dominio de los conceptos es una condición *sine qua non* para poder aplicarlos correctamente en la resolución de problemas (p. 703).

En el grupo de estudiantes de cuarto y quinto año básico, sus mayores vacíos están en conocimientos previos para revolver problemas y medición y geometría. La falta de conocimientos previos se correlaciona con la falta de comprensión de los problemas, lo cual impide que los alumnos utilicen las estrategias reflexivas adecuadas para resolver los problemas. En esta situación crítica se encuentran los alumnos que están en situación de emergentes y en situación de recuperación, grupos que en su gran mayoría no presento capacidad de concebir un plan para llegar a la solución de los problemas planteados y menos aun, verificar los resultados.

En el grupo de los estudiantes de sexto año básico, a pesar de ser un recurso indispensable, encontramos que proporciones importantes de estudiantes del grupo de los emergentes y en situación de recuperación que no cuentan con los conocimientos previos –concepto, nociones y sus relaciones- suficientes para resolver los problemas matemáticos. Las carencias se agudizan en las áreas de *geometría* y *variación proporcional*, donde confluyen, al menos, tres limitaciones: estrechez en el manejo de conceptos y las relaciones entre ellos, uso indiscriminado de algoritmos y una exigua actitud exploradora de las situaciones problemáticas y sus condiciones.

Las deficiencias en estos temas han sido diagnosticadas en el ámbito nacional por el Mineduc, pero sin llegar al detalle de las estrategias en las que se ubican los errores. El Mineduc ha revelado que geometría es el área con los aprendizajes más magros entre los alumnos de cuarto grado, tanto en las evaluaciones del 2010 como durante el 2011. Así en el reporte del 2011, afirmaba que en Geometría, se observó un bajo desempeño, especialmente en habilidades relacionadas con imaginar cuerpos e identificar sus características geométricas. Advertía también que nuestros niños tienen serias limitaciones para resolver problemas de porcentaje.

De esto se desprende la recomendación de que los maestros presten más atención a los vacíos que experimentan sus alumnos en torno a los conocimientos previos involucrados en los diferentes problemas que trabajan en las aulas. El siguiente paso sería, partir de esta información, para diseñar actividades que conduzcan a clarificarlos hasta lograr que todos cuenten con las nociones para abordar con eficacia las diferentes actividades de aprendizaje. Comenzar con los temas de geometría y variación proporcional podría ser una decisión estratégica en el caso de los estudiantes de sexto año básico y con resolución de problemas y mediciones y geometría en el caso de los estudiantes de cuarto y quinto año básico.

Este trabajo debiera enmarcarse en la perspectiva constructivista que hemos venido manejando. Por tanto, el trabajo pedagógico tiene que estar dirigido a lograr que los alumnos enriquezcan sus marcos conceptuales, lo que implica construir nuevos conocimientos e integrarlos a sus esquemas mentales –o modificarlos, si ya existen pasando necesariamente por el establecimientos de vínculos claros entre ellos.

La recomendación en este rubro puede aplicarse en diferentes contextos escolares, sería insistir con los profesores sobre la necesidad de que los alumnos construyan las nociones y conceptos básicos de las matemáticas por ellos mismos, de tal manera que se vuelvan recursos propios, y no recetas, al momento de resolver problemas.

Si los conocimientos previos son claves, la comprensión resultó determinante. Los resultados mostraron una correlación más fuerte de esta variable con la resolución de problemas que la variable anterior. Así entre los estudiantes que entendieron los problemas, las proporciones de respuestas correctas fueron muy altas (entre 75 y 92.6%). En contraparte, la no comprensión condujo a resultados equivocados también en alta proporciones (entre 80% y 90%). Sin duda, comprender exactamente lo que se pregunta, así como las nociones del problema -lo cual está ligado a conocimientos previos- es indispensable para enfrentar con eficacia una tarea como la que nos convoca. La comprensión muestra un mayor poder explicativo en los problemas de *Números fraccionarios* y *Perímetros, áreas y figuras geométricas* y Mediciones geométricas en alumnos de cuarto y quinto año básico.

El saldo negativo entre la importancia de este paso y la proporción de alumnos que lo dan correctamente es mayor en este caso que en el anterior. En todos los casos son menores los porcentajes de alumnos que comprenden, que aquellos que cuentan con conocimientos previos suficiente. Este dato coincide con los hallazgos de Valle *et al* (2007) acerca de la baja frecuencia (35%) de alumnos que comprenden los problemas en una olimpiada de matemáticas. Al igual que estos autores, nosotros consideramos que la comprensión trasciende el ámbito matemático e implica por parte del estudiante, el dominio de la lectura y valoración crítica de textos, en particular lo que se refiere a la localización de información específica, hacer inferencias simples, captar relaciones entre componentes e identificar información implícita (p. 8). Vale la

pena agregar que también requiere contar con un marco conceptual adecuado, aunque esto no es suficiente.

Otro aspecto interesante, relacionado con esta variable, fue conocer las respuestas que incluían una comprensión parcial del problema por parte de los alumnos, ya que se observó que dependiendo del tema, entre un 3% y un 16%, llegaron a respuestas incorrectas, debido a una pobre comprensión lectora. Es relevante hacer notar que una alta proporción de alumnos intentaron contestar la prueba sin esforzarse demasiado en comprender los problemas. Sin embargo, cuando fueron entrevistados, muchos lograron comprender y resolverlos con éxito, a partir de una segunda lectura más atenta. Se percataron de que no habían puesto suficiente atención en el momento de la prueba.

En este sentido, pese a que este estudio no se propuso como objetivo analizar las creencias de los alumnos, parece relevante mencionar las afirmaciones sobre la importancia e influencia de lo que ellos creen al momento de realizar un problema matemático. Al parecer, siguen reproduciendo la creencia de que *“los estudiantes corrientes no pueden esperar entender matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente”* (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006).

Estos hallazgos nos permiten dimensionar la importancia que tiene la comprensión para la solución de problemas. Tal vez la recomendación más importante que podemos hacer refiere a la necesidad de que los maestros sean conscientes de la trascendencia de este paso e intensifiquen las estrategias pedagógicas para impulsarlo. Habría que empezar por poner más atención en la lectura de comprensión y en estimular el establecimiento de relaciones entre los datos, así como en la generación de inferencias a partir de las situaciones planteadas. En el marco del Modelo de Matemáticas Constructivas, dos fases resultan claves para alcanzar este objetivo: la exploración y la verbalización. Mediante estas etapas se puede estimular la percepción de las características y condiciones de las situaciones problemáticas, así como el ordenamiento razonado de las relaciones presentes. El diálogo entre compañeros también sería de gran ayuda, como ya se ha señalado. El trabajo colaborativo entre los estudiantes es una estrategia que facilita el diálogo y la discusión entre los estudiantes, facilitando así la definición de roles de cada uno y el aprendizaje de los diferentes puntos de vista de sus iguales.

Desde este punto de vista, tal vez sea necesario bajar la presión entre los estudiantes por llegar a una solución; es decir, por pensar sólo en el resultado antes que en los procesos. Todo parece indicar que el proceso debe ser realizado. Al mismo tiempo, es imprescindible combatir algunas creencias prevalecientes tales como: la idea de que los problemas matemáticos tienen solo una respuesta correcta y una única manera de arribar a ella.

En lo que toca al establecimiento de un plan, nuestros hallazgos revelan que este paso tiene importancia en la medida que permite al alumno trabajar para lograr un objetivo definido. Observamos que, ante la ausencia de un plan, los alumnos tienden a echar mano de estrategias irreflexivas, que en la mayoría de los casos desembocan en errores. Esta variable tiene un buen poder explicativo en el problema de *Variación proporcional*, por tanto sería recomendable impulsarla en estos temas en el caso de los estudiantes de sexto año básico y de resolución de problemas en el caso de los estudiantes de cuarto y quinto año básico.

La didáctica de las matemáticas debiera poner énfasis en este paso, especialmente para propiciar un trabajo más ordenado por parte de los estudiantes. Habría que estimular que los alumnos reflexionen sobre la importancia que tiene establecer un procedimiento a seguir de acuerdo con la incógnita y la relación entre los datos. Al mismo tiempo, habría que tener presente que la comprensión del problema es un requisito fundamental para diseñar un plan. Trabajar en estos dos pasos de manera interrelacionada podría resultar en desempeños más eficaces. Las preguntas sugeridas por Polya (1965) pueden ser de utilidad para ayudar a los alumnos en el establecimiento de un plan: ¿conoce un problema relacionado con éste?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos?

El análisis de los planes de los alumnos permitió detectar la importancia de implementar y fomentar maneras creativas de aproximarse a los problemas matemáticos. En este sentido, compartimos las posiciones de Escareño (2005) y Fuenlabrada (2005) sobre la relevancia de permitir a los estudiantes ensayar formas novedosas y particulares de resolver problemas; más allá de los métodos convencionales.

Así, los ejemplos que recuperamos en este estudio, nos llevan a percatarnos de las ventajas pedagógicas que puede tener aprovechar este tipo de resoluciones. Los alumnos que tienen acercamientos más creativos podrían socializar sus procedimientos y colaborar con sus compañeros en el desarrollo de estrategias, explotando así la zona de desarrollo próximo sugerida por Vygotsky.

El análisis de las estrategias de resolución de problemas, propiamente dichas, arrojó un dato muy positivo y es que hay una mayor incidencia de procedimientos reflexivos que irreflexivos; sin embargo, su frecuencia fue mucho menor al tratarse de los problemas más difíciles, específicamente los de geometría. Por ello, podemos afirmar que la ausencia de marcos conceptuales adecuados y la deficiente comprensión se combinan de manera desafortunada en los problemas más complejos agotando las posibilidades de razonamiento lógico de los niños y conduciéndolos a echar mano de métodos que está fuera de toda lógica.

Encontramos que ante la ausencia de comprensión y de un plan justificado, los alumnos recurren frecuentemente a la realización de operaciones con los datos proporcionados aunque éstas carezcan de sentido. Esto confirma los hallazgos de Rizo y Campistrous (1999, p. 39) quienes advierten una “tendencia ejecutora” entre los estudiantes y la creencia de que “un problema siempre debe conducir a resolver operaciones”.

La estrategia irreflexiva más frecuente fue tratar de adivinar la operación correcta, lo que corrobora que persiste la creencia sobre las matemáticas como algo desligado de la realidad, en donde sólo hay que aplicar algoritmos y fórmulas irreflexivamente.

Al mismo tiempo, advertimos que el repertorio de estrategias empleadas por los alumnos no es muy amplio y tiende a concentrarse prácticamente en una: *la selección de la operación pertinente según la incógnita*. Si bien ésta puede ser una estrategia efectiva, no siempre condujo a respuestas correctas y, contradictoriamente, su efectividad tiende a disminuir en los problemas más fáciles (*Números fraccionarios y Tratamiento de la información*). Aún en problemas de geometría, donde la estrategia más idónea sería la de *Diseñar un dibujo*, fue ésta la predilecta por los niños. Esto confirma la tendencia ejecutora, ya mencionada. Es decir, los estudiantes parecen recurrir de manera automática a la realización de cálculos, aunque éstos no sean indispensables.

Es de llamar la atención, que el razonamiento directo que parece natural o intuitivo haya sido utilizado por tan baja proporción de estudiantes aun en problemas donde las relaciones visuales eran evidentes, como es el caso del último de la prueba. En el caso de geometría, poco más del 50% de los alumnos se aproximó a la resolución de estos problemas de manera más bien tradicional, es decir, tratando solamente de sustituir los datos de una fórmula. Ello se puede deber al abuso en la manipulación de algoritmos y fórmulas a la que están acostumbrados los alumnos que, al parecer, obstaculiza otras formas de acercamiento a la comprensión y resolución de los problemas.

Estos hallazgos sobre los procedimientos exhibidos por los alumnos, parece confirmar algunas de las conclusiones del trabajo de Arteaga y Guzmán, (2005) sobre la importancia de trabajar con problemas de diferente naturaleza para estimular el desarrollo de diferentes estrategias y habilidades en los niños.

En definitiva, sería intensamente el empleo de diversas estrategias, para ello podría resultar útil la experiencia de Arteaga y Guzmán (2005) quienes detectaron que el trabajo colectivo fue de gran ayuda para los alumnos, ya que la mayoría retomaban constantemente las estrategias utilizadas en la discusión

en grupo y consecuentemente mostraron un mejor desempeño. Es decir, el trabajo en equipo para analizar y valorar distintos procedimientos permite aproximarse a los objetos de conocimiento junto con otros sujetos y construir el conocimiento en colectivo. En esto coinciden varios autores (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006; Arteaga y Guzmán, 2005 y Larios, 2000).

Al mismo tiempo, trabajar con diferentes procedimientos, especialmente estrategias reflexivas -como ordenar los datos y tenerlos presentes y apoyarse en esquemas y dibujos- son heurísticas que fortalecen la comprensión del problema y pueden conducir a formas más eficaces de resolverlos.

Por último, el presente estudio confirmó la importancia de la verificación de resultados después de la prueba. Muchos alumnos al explicar nuevamente el procedimiento que habían realizado, detectaron sus propios errores. Lo cual desde el paradigma constructivista devuelve a las evaluaciones su verdadero sentido dentro un proceso cíclico y no como cúspide de un proceso.

Finalmente, cabe una reflexión sobre el tipo de problemas utilizados. Lo primero que resulta necesario tener presente es que con frecuencia se utiliza cierto tipo que tiende a confundir al alumno, especialmente a quienes enfrentan de manera impulsiva la tarea. Una muestra de ello la presenciábamos con el problema de números fraccionarios cuya incógnita generó confusiones, así durante la entrevista un estudiante expresó lo siguiente:

“Me desesperé la pregunta y la contesté por achunte”

Habría que reflexionar sobre las competencias que se desee evaluar y contemplar la posibilidad de manejar diferentes indicadores de desempeño para los distintos pasos y actividades involucradas en la resolución. Claramente, una prueba tipo Enlace no se presta para ello; sin embargo, situaciones de esta naturaleza son abarcadas en PISA con mayor capacidad para discriminar los niveles de dominio.

Por otra parte, conviene recurrir a verdaderos problemas -esto es, situaciones reales o hipotéticas plausibles para el alumno- que planteen retos significativos y que, como propone Alsina (2007), activen su interés y su mente. Es necesario, desestimar el uso de ejercicios que demandan respuestas mecánicas que sólo recurren a la memorización de un algoritmo. Además, reiteramos lo señalado renglones arriba, sobre la conveniencia didáctica de trabajar con problemas de diferente naturaleza para estimular el desarrollo de un repertorio más amplio de estrategias y habilidades en nuestros alumnos.

SEGUNDA PARTE

RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS DEL ESTUDIANTADO DE ENSEÑANZA BASICA BAJO LA INSTRUCCIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONTROL Y MONITOREO DE SUS PROCESOS COGNITIVOS

INDICE	Pág.
1. Introducción	64
2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	64
3. ENFOQUE TEORICO.....	65
3.1. Estudios realizados sobre el tema de la investigación	65
3.2. La resolución de problemas matemáticos, competencia matemática y la metacognición.....	67
3.3. Fundamentos teóricos asociadas a la metacognición	73
3.4. Resolución de problemas contextualizados y estrategias didácticas basadas en la metacognición...	74
4. METODOLOGÍA.....	82
4.1 Contextualización.....	82
4.2 Diseño metodológico.....	83
4.3 Población y muestra.....	84
4.4 Sistema de variables.....	84
4.5 Operacionalización de la variable dependiente.....	85
4.6. Instrumento de evaluación.....	87
4.7 Variables.....	90
4.8 Equivalencia inicial entre los grupos. <i>Control de variables</i>	90
4.9 Sistema de hipótesis.....	91
4.10. Programa de intervención.....	92
4.11. Planeación de clase utilizando el programa de intervención.....	95
4.11.1 Metodología del programa	99
5. ANALISIS ESTADISTICO E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN...	105
6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	113
6.1. Conclusiones Finales.....	117
6.2. Recomendaciones y sugerencias.....	117

1. INTRODUCCION

En esta parte de la investigación-acción se pretende conocer los aspectos pedagógicos y didácticos que tienen incidencia en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de sexto año básico perteneciente a escuelas municipalizadas. Esto porque cobra relevancia actualmente el hecho de que las estrategias didácticas que emplee el estudiante para aprender cumplen con el objetivo de que el estudiante sea un sujeto activo en el proceso de aprender.

Este tipo de estrategias de aprendizaje suponen un cambio de paradigma en la educación, que va desde la enseñanza tradicional donde el maestro es el protagonista del proceso, hasta llegar a que el estudiante sea el centro de este, por medio de estrategias de aprendizaje, donde el aprender a aprender y el aprender a reflexionar sobre su propio aprendizaje, permite llegar a obtener aprendizajes altamente significativos.

Específicamente en la educación matemática, donde se abordan diferentes procesos generales, tales como: el razonamiento, la modelación, la comunicación matemática, la formulación y resolución de problemas, se estudian las estrategias didácticas que prueban el aprendizaje autónomo, sistemático y reflexivo en lo que respecta a la resolución de problemas matemáticos contextualizados.

La resolución de problemas ha tomado fuerza en el campo investigativo, debido a la importancia que esta tiene en el desarrollo de competencias para la vida, es así como en diferentes documentos tanto internacionales como nacionales, resaltan su valor y la necesidad del desarrollo de esta competencia (Informe Cockcroft, 1982, PISA 2006; Lineamientos curriculares de matemática y Mineduc 2009).

En este trabajo se analizan las diferentes posiciones teóricas sobre el significado de un problema y específicamente un problema matemático y las competencias que se requiere poseer para aprender a resolver problemas matemáticos. Este aspecto se relaciona no solo con el saber qué sino además saber por qué. Lo último se relaciona con la acción, con las técnicas y estrategias que permiten representar los conceptos y transformarlos, es decir, saber cómo, con la construcción del conocimiento conceptual permitiendo su uso eficaz. Se hace revisión entonces, de las propuestas de diferentes teóricos respecto a las estrategias para resolver problemas y se destaca el rol de las estrategias metacognitivas propuesta por Flavell (1976) en cuanto se refiere al conocimiento que uno tiene sobre sus propios procesos y productos cognitivos y que se asocian con el conocimiento sobre los procesos y la regulación de los procesos cognitivos.

En este trabajo se aborda lo referido a lo procedimental, el saber cómo, relacionándolo con la planificación, el control y evaluación de estos procesos. Se trata entonces, de examinar, luego que los estudiantes son sometidos a un taller de enseñanza en estrategias metacognitivas, la habilidad que presentan estos estudiantes para planificar, controlar y evaluar sus procesos de resolución de problemas.

2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 Objetivo General:

Determinar la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 6º de la escuela pública municipal de Copiapó.

2.2 Objetivos específicos

- Establecer un marco referencial pertinente a la constitución de propuestas tendientes al desarrollo de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo.
- Diseñar un programa de intervención teniendo en cuenta estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, en concordancia con las teorías seleccionadas.
- Evaluar la efectividad de la enseñanza empleando estrategias didácticas con enfoque metacognitivo como método innovador, en estudiantes de 6º de la escuela municipal de Copiapó.
- Comparar los procesos y resultados de aprendizaje de estudiantes de diferentes grupos, sujetos unos al enfoque didáctico tradicional y otros a estrategias didácticas con enfoque metacognitivo

- Establecer la existencia de diferencias estadísticamente significativas en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos de estudiantes de 6º, entre los métodos tradicionales de enseñanza y las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo.

3. ENFOQUE TEORICO

3.1. Estudios realizados sobre el tema de la investigación

Se han realizado investigaciones en que se pone en marcha una propuesta de enseñanza – aprendizaje que guía el aprendizaje de estrategias generales (de tipo cognitivo y metacognitivo) y de estrategias específicas de resolución de problemas. Los elementos más importantes que se definen y ejemplifican en la propuesta diseñada son los siguientes: a) el diseño de un material didáctico formado por un conjunto de instrucciones-guía y de cuestiones sobre diferentes aspectos del proceso de resolución de un problema y que denominamos como hojas para pensar el problema (Pifarré, 1998); b) la planificación y utilización por parte del profesor de estrategias de enseñanza de modelaje y de auto-interrogación; y c) el diseño de un contexto de aprendizaje que favorece la resolución de problemas de manera colaborativa entre parejas de alumnos.

En uno de los trabajos se mostró la incidencia positiva, en el aprendizaje de los alumnos, de cuatro elementos de la propuesta didáctica analizada y que tendrían que estar presentes en el diseño de propuestas de enseñanza-aprendizaje que tengan como objetivo mejorar el proceso y las estrategias para resolver problemas matemáticos de los alumnos de ESO: a) contextualizar los problemas a resolver por el alumno en situaciones cotidianas de su entorno; b) utilizar métodos de enseñanza que hagan visibles las acciones para resolver un problema, proceso poco conocido desde el punto de vista del alumno; c) diseñar diferentes tipos de materiales didácticos que guíen la selección, la organización, la gestión y el control de los diferentes procedimientos para resolver un problema; y d) crear espacios en consonancia con lo anterior. Cabe citar también la investigación realizada por Ruiz (2002) en Venezuela, donde el objetivo principal del estudio consistió en determinar si existe una transferencia del entrenamiento metacognitivo en comprensión de lectura al mejoramiento de la habilidad de resolución de problemas y viceversa, el estudio se diseñó con los propósitos de: a) determinar el efecto del entrenamiento metacognitivo en las variables habilidad de comprensión de lectura (HCL) y habilidad de resolución de problemas (HRP); y (b) determinar si es posible la transferencia recíproca de dicho entrenamiento entre ambas variables.

Se utilizó un diseño cuasi-experimental de tres grupos intactos, con pretest y postest. La muestra estuvo constituida por 98 estudiantes de séptimo grado de Educación Básica, organizados en secciones de clase ($n_1 = 32$; $n_2 = 30$ y $n_3 = 36$), provenientes de una unidad educativa pública de la ciudad de Cabudare (Estado Lara, Venezuela).

El tratamiento del grupo 1 consistió en la aplicación de estrategias metacognitivas en la lectura a fin de mejorar su nivel de comprensión; El tratamiento del grupo 2 fue similar al del grupo 1, en cuanto a la estrategia de mediación utilizada y en cuanto al propósito del modelo. La distinción básica consistió en la naturaleza del tipo de tarea utilizada en el entrenamiento metacognitivo. En este caso, se utilizó un enfoque de resolución de problemas genéricos; En el tratamiento del grupo 3, los estudiantes trabajaron con un material similar al de los grupos 1 y 2 (siete lecciones de las fichas de comprensión de lectura y siete ejercicios de resolución de problemas), pero sin la intervención mediadora del docente.

Los resultados indican que la mediación de estrategias metacognitivas del docente tuvo un efecto significativo en el mejoramiento de las habilidades de comprensión de lectura y de resolución de problemas de los sujetos, lo cual es un importante aporte a este trabajo debido a la metodología aplicada de carácter cuantitativo y un diseño cuasi experimental con grupos intactos, y también la variable dependiente que se trabajó como habilidad de resolución de problemas.

En el marco del presente trabajo, cobra relevancia la investigación realizado por Toboso (2004), en lo que respecta a la evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos. Investigación realizada con estudiantes del primer ciclo de educación Secundaria Obligatoria, en una provincia de Valencia (España).

Según Toboso la capacidad para resolver problemas matemáticos está relacionada con las siguientes habilidades cognitivas y conocimientos específicos:

- El dominio lingüístico-semántico de la lengua en la que están expresados los problemas, como elemento básico para comprender su significado.
- El desarrollo de unos esquemas cognitivos que permitan representar el problema mentalmente, integrarlo en una categoría y elegir el planteamiento adecuado de resolución.
- El conocimiento de unas estrategias que planifiquen y organicen los pasos del proceso a seguir para llegar desde el estado inicial al final del problema.
- El dominio operatorio o algorítmico que permita ejecutar las operaciones necesarias para llegar a la solución de forma precisa.

Entre algunas de las conclusiones del autor se destaca la comprobación de hipótesis teóricas tales como: Se constata que la comprensión lectora, el reconocimiento de la naturaleza del problema, la organización de las estrategias que lo resuelven, y la ejecución correcta de los algoritmos, aritméticos y algebraicos, son variables predictores del rendimiento general en matemáticas y de la capacidad que presentan los alumnos para resolver los problemas planteados en esta asignatura (Sternberg, 1985a y Mayer, 1983).

En relación a los componentes cognitivos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos, se advierten las mayores dificultades en el reconocimiento del problema y el conocimiento estratégico (Lewis y Anderson, 1985; Sternberg, 1985a y 1985c; y Berger y Wilde, 1987). Un porcentaje significativo de alumnos resuelven, de forma “mecánica”, una parte de los problemas planteados, ejecutando los algoritmos indicados, pero desconociendo la naturaleza del problema (Sternberg, 1986). A su vez los estilos ejecutivo, legislativo y local, de Grigorenko y Sternberg (1992), inciden positivamente en el rendimiento escolar de los alumnos, presentando peores resultados los alumnos con estilo progresista (Serrano, 1994). También concluye que el grado de autoestima académica se presenta como una variable con clara incidencia favorable en el desarrollo cognitivo de los alumnos y el rendimiento escolar (Alonso Tapia, 1986 y 1995).

De esta forma la investigación realizada por Toboso (2002), es relevante en la medida que otorga importancia a las estrategias que los estudiantes utilizan para resolver problemas matemáticos sean rutinarios o contextualizados, de esta manera brinda un andamiaje para esta propuesta en el orden que se intenta poner a prueba diferentes estrategias didácticas con un enfoque metacognitivo en pos de ir desarrollando diferentes capacidades, específicamente la habilidad de resolver problemas matemáticos contextualizados.

En el mismo sentido se encuentra el trabajo realizado por Sulbarán (2007) sobre estrategias docentes y las capacidades metacognitivas del alumno, quien resalta la importancia de promover estrategias docentes (estrategias didácticas) que incentiven las capacidades metacognitivas en los estudiantes, aunque este trabajo se ajusta al área de lingüística, es importante para esta investigación debido que utiliza un diseño metodológico muy parecido al que aquí se plantea, es decir un diseño de cuatro grupos (de Solomón).

Un estudio reciente, se da en estudiantes de básica primaria, al igual que el presente, lo cual no es muy común; Tárraga (2008), valora la eficacia de un entrenamiento en solución de problemas matemáticos basado en la instrucción y práctica de estrategias cognitivas y metacognitivas en alumnos con dificultades del aprendizaje en matemática (DAM). Su diseño metodológico de tipo cuasi-experimental, con tres pruebas, antes de la intervención, inmediatamente después de la intervención y transcurridos dos meses tras la intervención, evalúa los efectos inmediatos del programa como el mantenimiento en el tiempo de estos efectos.

Tárraga corrobora la hipótesis de que el programa de entrenamiento es beneficioso, y sus efectos se mantienen en periodos de tiempo prolongados, al menos hasta dos meses. Se demuestra que el entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas si tiene efectos positivos duraderos en periodos de tiempo razonables.

También concluye que la intervención llevada a cabo por los propios maestros de los estudiantes, da resultados favorables, es decir, se constata que los agentes que directamente intervienen con los alumnos son capaces de desarrollar correctamente la intervención si reciben la información adecuada.

Cada una de las investigaciones expuestas anteriormente apoya el propósito de este trabajo, en primer lugar desde el aspecto referencial y teórico brindando amplias concepciones sobre el término metacognición así como los procesos

donde esta se desarrolla, permitiendo la articulación de estrategias didácticas con una mirada desde lo metacognitivo en pro del desarrollo de la competencia para resolver problemas en los estudiantes de la básica primaria, a su vez que se potencializan las competencias que les permiten mejorar el acceso al conocimiento.

En segundo lugar, desde el punto de vista metodológico, se puede observar la variedad de métodos en los que se han ido desarrollando en las investigaciones referidas a la educación matemática y a las propuestas metacognitivas, desde lo cualitativo y lo cuantitativo; algunos investigadores utilizan instrumentos y técnicas como el PEVA (Pensamiento en voz alta) y los protocolos cognitivos, precisos para realizar sus estudios referentes a lo metacognitivo; otros utilizan pruebas con diseños pretest – postest, utilizando instrumentos validados y confiables, con el fin de medir la variable independiente intervenida con estrategias de tipo metacognitivo, comparando diferentes grupos para establecer diferencias significativas entre ellos.

En lo que respecta al diseño de la propuesta de intervención resulta primordial tener en cuenta lo siguiente : a) contextualizar los problemas a resolver por el alumno en situaciones cotidianas de su entorno; b) utilizar métodos de enseñanza que hagan visibles las acciones para resolver un problema; c) diseñar diferentes tipos de materiales didácticos que guíen la selección, la organización, la gestión y el control de los diferentes procedimientos para resolver un problema; y d) crear espacios de discusión y de reflexión alrededor de este proceso. Pifarré y Sanuy (2001).

Por último, se tienen en cuenta algunas recomendaciones dadas, tales como: la intervención sea llevada a cabo por los propios maestros de los estudiantes como agentes que directamente intervienen con los alumnos, realizándoles la cualificación pertinente al proceso; incorporar en cualquiera de las formas de planificación escolar, alternativas metodológicas que coadyuven en el desarrollo de las potencialidades de los alumnos para el uso de la metacognición a los fines de mejorar los procesos de aprehensión de conocimiento matemático en éstos; trabajar con problemas contextualizados y que la enseñanza de contenidos matemáticos basada en la resolución de problemas y la reflexión conjunta de estudiantes y docentes sobre los procesos de resolución (estrategias metacognitivas) favorece el proceso dialéctico de construcción del conocimiento.

3.2. La resolución de problemas matemáticos, competencia matemática y la metacognición

En este apartado se tratará mostrar las diferentes concepciones que se han presentado sobre la resolución de problemas matemáticos adicional a lo indicado en la primera parte de esta investigación y siguiendo a los mismos autores y otros pocos.

El término “problema” se ha definido, según Kilpatrick (citado por Callejo, 1998), desde diferentes perspectivas, la psicológica (el sujeto que aborda el problema y los procesos mentales implicados en su resolución), el curricular (el papel que juegan los problemas en la enseñanza de la matemática), el Matemático (definición de qué es un problema) y el didáctico (como se enseña y aprende a resolver problemas). Por esta razón vale la pena discutir sobre la noción de “problema” y de que manera se aproximaría en este trabajo una concepción a lo que se considera problema.

Desde el ámbito de la educación matemática, se encuentran diversas concepciones sobre lo que es un problema, autores como Schoenfeld (1988), Alferi (1993) o Pozo et al (1994), plantean la definición de problema como: “Situación que precisa una solución pero que, generalmente, no tiene un camino de solución rápido y directo, sino que se debe ir realizando una toma de decisiones (y por ende, modificando y comprobando) a lo largo de la propia resolución”. Se puede inferir entonces, que lo que representa un problema para un estudiante, puede no serlo para otro, situación que respalda la diversidad escolar.

Ahora bien, se identifican también tres grandes variables que hacen posible un ente problemático, como primera medida, el grado de familiaridad con la tarea pero también con el contexto en el que se desarrolla, en segundo lugar se tienen en cuenta las experiencias y conocimientos con algún atributo de la tarea, y finalmente, el interés o motivación que provoque la situación a resolver. Esta última es muy importante en el trabajo con infantes que se encuentran en básica primaria, ya que si la situación planteada genera interés y motivación, la resolución de está será abordada y en el mejor de los casos resuelta con satisfacción.

En concordancia con lo anterior en pro de llegar a un acuerdo sobre los que es para esta investigación un problema se puede decir que: es una situación prevista o espontánea, la cual presenta algunos elementos desconocidos para el sujeto, el cual debe poner en práctica diferentes estrategias, conocimientos y habilidades de tipo cognitivo como metacognitivo, en busca de encontrar una solución a dicha situación.

Según Posada (2008), el concepto de competencia es pluridimensional, integra creencias, valores, actitudes, aptitudes, conocimientos, potencialidades, habilidades, destrezas, hábitos, prácticas y acciones personales, colectivas, afectivas, sociales, culturales, etc., en los diferentes escenarios de aprendizaje y desempeño.

Para el Ministerio de Educación (Minedec) la competencia se define como el conjunto de “Conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores”. (Guía No.3 MEN, 2006, pág. 49.).

Vale la pena aclarar que a pesar de lo polisémico del término competencia según Fernández (2009), se encuentran rasgos característicos dentro de cada una de las definiciones que se han ido planteando en diferentes contextos tanto temporales como espaciales (Pisa 2004, parlamento europeo 2006, OCDE 2006), tales como:

- Es un saber hacer. Hay que saber, pero hay que saber aplicarlo.
- Deben ser susceptibles de aplicarse a diferentes contextos.
- Poseen un carácter integrador.
- Permiten obtener resultados de alto valor personal y social.
- Se ocupan de aspectos relevantes para las personas.
- Su dominio permite superar con éxito exigencias complejas.
- Facilitan el auto-aprendizaje y son la base del “aprender a aprender”.
- Permiten la comprensión y el dominio de conceptos.

Ahora bien, en el contexto de este trabajo es pertinente conceptualizar el término competencia dentro del campo matemático, específicamente en al campo de la matemática escolar.

El dominio sobre matemáticas que se asimila en el estudio PISA 2003 es conocido como *Alfabetización Matemática* (Mathematical Literacy) (OCDE, 2003) y también, de modo general, como *Competencia Matemática* (OCDE, 2004). Este dominio se refiere a las capacidades individuales de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Según PISA (2006) *La competencia matemática* es la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. Esta competencia general se puede desglosar en una serie de competencias específicas o particulares enmarcada en los contextos de cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones, e incertidumbre. (Rico, 2006)

Llinares (2003) argumenta que para ser competente matemáticamente, se requiere establecer relaciones entre las capacidades de realizar tareas matemáticas y comprender por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolver las tareas, junto con la posibilidad de argumentar la conveniencia del uso. *Define cinco dimensiones de la competencia: comprensión conceptual, desarrollo de destrezas procedimentales, pensamiento estratégico: formular y resolver problemas, capacidad de comunicar y explicar matemáticamente, actitudes positivas en relación con sus propias capacidades matemáticas.* (García et al, 2009)

Así mismo Vasco et al (2006) define los cinco tipos de pensamiento que hacen parte de la matemática, el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. El pensamiento numérico se refiere a la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación, en sexto grado se establecen los contextos de los números naturales y los racionales positivos. Para Vasco et al (2006) el desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones,

modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan.

El pensamiento Espacial y los sistemas Geométricos se entiende como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales; El pensamiento Métrico hace referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones; El pensamiento Aleatorio también llamado probabilístico o estocástico integra los conceptos y procedimientos necesarios para recoger, estudiar, resumir y diagramar sistemas de datos estadísticos y para tratar de extraer de ellos toda la información posible con la ayuda de calculadoras, hojas de cálculo y otros programas de análisis de datos, con el fin de intentar predecir dentro de ciertos rangos el curso de los acontecimientos respectivos y de tomar decisiones lo más razonables posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar.

Por último, el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Ahora bien, lo anterior hace referencia a los contextos disciplinares en los que se ha constituido la matemática al pasar del tiempo, sin embargo también es importante relacionar la competencia matemática con la resolución de problemas en específico, desde el desarrollo de diferentes conocimientos declarativos, procedimentales y actitudinales que se ponen en juego para desempeñarse en este campo. Se hace hincapié que la resolución de problemas ha sido descrita como la estrategia didáctica mas adecuada para enseñar la matemática, también como habilidad de pensamiento superior, y como competencia a desarrollarse en el currículo escolar.

En el apartado anterior, describimos algunos modelos para resolver problemas como el de Polya, de Mayer, de A. H. Schoenfeld, de Mason – Burton – Stacey, de Miguel de Guzmán. El modelo de Pifarré, Manoli y Sanuy, Jaime indica que:

Una Perspectiva metacognitiva: Para estos autores, Las cinco estrategias generales utilizadas para resolver problemas son:

1. Entender y analizar el problema
2. Planificar un plan de resolución
3. Organizar los datos y el plan de resolución en un cuadro de doble entrada
4. Resolver el problema
5. Evaluar el proceso de resolución del problema y el resultado obtenido.

Estas estrategias se presentan en un material didáctico al que le denominan “*hojas para pensar el problema*” Pifarré (1998), en la cual aparecen las fases del modelo cada una con diferentes orientaciones hacia el procesos a seguir, el modelo de Pifarré et al, incorpora a su vez las estrategias metacognitivas las cuales son utilizadas en cada una de las fases anteriores.

La hoja para pensar el problema, se estructura como una guía para el estudiante que le sirve de apoyo en el momento en que se enfrenta a una situación problemática, como ejemplo, algunos apartes de la hoja se muestran en el siguiente grafico.

Cuadro I. Pautas para analizar y para evaluar el resultado y el proceso de resolución del problema.



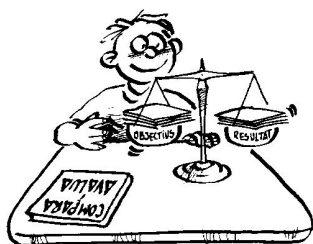
1. ENTENDER EL PROBLEMA

Lee el enunciado del problema. Subraya los datos más relevantes: ¿Qué te pide el problema? ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?

¿Qué te pide el problema? ¿Qué tienes que encontrar? ¿Dónde tienes que llegar?

.....
¿Qué datos ya conoces? Anótalos brevemente.

.....
Anota los datos que tienes que encontrar para solucionar el problema.



2. EVALUAR EL RESULTADO DEL PROBLEMA

Pautas para analizar y para evaluar el resultado y el proceso de resolución del problema.

¿Has conseguido encontrar la solución del problema?

¿Por qué? Justifica tu respuesta explicando los indicadores en que te basas para saber si has conseguido hallar la solución al problema.

.....
Haz un gráfico con los principales datos del problema (datos del enunciado y datos que tú has calculado). ¿Cómo puedes explicar la evolución que siguen los datos en el gráfico?

.....
¿Has encontrado algún error en la representación de los datos?

.....
¿Alguna de las partes del problema se podría calcular de alguna otra manera?

¿Cómo?

Repasa los cálculos que has realizado. ¿Has encontrado algún error?

.....
¿De qué tipo de error se trata?

¿Cómo puedes evitar en el futuro cometer este tipo de error?

.....

Fuente: Tomado de Pifarré et al (2001)

Como se observa cada fase tiene una serie de preguntas que conllevan al estudiante a que tome conciencia del proceso que está utilizando al enfrentar un problema matemático. Para esta investigación se tomará como referente este modelo.

En los anteriores modelos sobre resolución de problemas, se tienen en cuenta ya sea de manera implícita o explícita el conocimiento y los procesos metacognitivos, por ello es importante considerar cómo se ha entendido la metacognición, retomando algunos aspectos que en este concepto se han definido.

El término metacognición es acuñado por Jhon H. Flavell en la década de los setenta, con el fin de definir al conocimiento sobre cómo conocemos (conocer el propio conocimiento).

La definición que le dio Flavell (1976) a este término dice que se *“refiere al conocimiento que uno tiene sobre los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionando con ellos...La metacognición se refiere, entre otras cosas a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetivos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de una meta u objetivo concreto”*.

Este concepto enmarca la indagación sobre cómo los seres humanos piensan y controlan sus procesos de pensamiento, analizando el concepto dado por Flavell, se encuentra que los relaciona con los siguientes conceptos:

- **Conocimiento:** La metacognición como producto de la actividad mental, indicando que los seres humanos podemos sistematizar, organizar mediante herramientas simbólicas los procesos asociados a una actividad mental, siendo conscientes de ello y dando cuenta de esto a otros y a sí mismos.
- **Procesos y productos:** La actividad mental se compone de procesos (identificar, analizar, inferir, razonar, solucionar problemas,...), que pueden ser básicos o superiores, y sus respectivos productos (percepciones, pensamiento, ideas, modelos, conceptos,...).
- **Cognitivo:** Actividad mental por la cual se construye conocimiento sobre el mundo físico, social y psicológico.

Supervisión activa: la metacognición requiere de una permanente conciencia de la persona sobre su actividad mental, considerando para ello una especie de evaluación permanente sobre los procesos y productos de la actividad cognitiva.

Regulación y organización: hace referencia a la actividad consciente del sujeto sobre los procesos cognitivos, dándoles un orden a los mismos para orientarlos de mejor manera hacia la consecución de metas propuestas.

Datos cognitivos: están constituidos por todos los objetos del conocimiento transpuestos en signos, símbolos e ideas. A partir de los cuales se construyen las representaciones sobre las cuales la mente opera.

Metas: expresan las intenciones de la actividad cognitiva y determinan de alguna manera su dirección. Implica que estas actividades requieran de la existencia de objetivos y dentro de una propuesta de aprender a aprender, éstas deben ser conscientes para el aprendiz, a fin de garantizar su mejor desarrollo.

A su vez, Flavell (1984) identifica dos aspectos esenciales de la metacognición, el autor la asocia con dos componentes, que son: el conocimiento sobre los procesos cognitivos y la regulación de los procesos cognitivos.

El primer componente se refiere, según Martí (1995), al conocimiento que una persona tiene (o elabora en una situación determinada) sobre los propios procesos cognitivos (saber qué). Es posible clasificar este conocimiento en tres categorías: Conocimiento sobre la persona, conocimiento sobre la tarea y conocimiento sobre la estrategia (o estrategias).

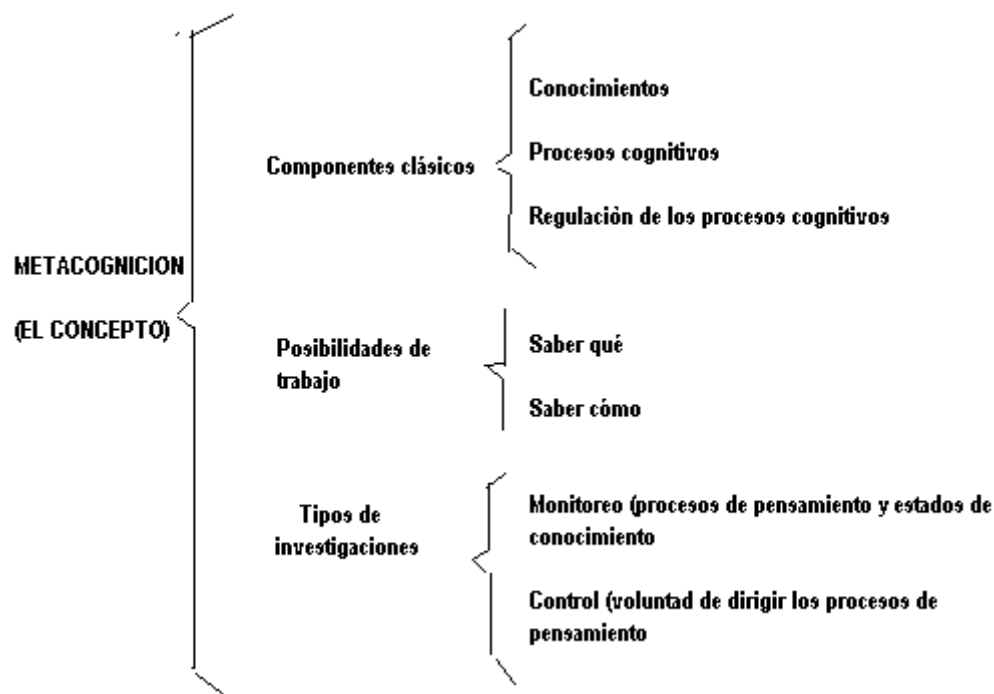
Sobre el conocimiento de las estrategias se puede decir que se refiere a las acciones cognitivas (atención, ensayo, elaboración, recuperación) que en el sujeto actúan para la consecución efectiva del objetivo propuesto. Una estrategia cognoscitiva es aquella designada simplemente a llevar al individuo a conseguir algún objetivo o sub-objetivo cognoscitivo. Por ejemplo sacar la cuenta de la lista de lo que se debe en la tienda, necesita una estrategia cognoscitiva sumar las cantidades y de esta manera obtener el resultado. El objetivo es encontrar el valor total de los sumandos. En la misma situación, una estrategia de tipo metacognitiva sería realizar una segunda y tercera suma para estar seguros del resultado, ya el objetivo de estas operaciones es diferente que el de la primera, el propósito ya no es alcanzar el objetivo (estrategia cognoscitiva), sino sentirse seguro de que se ha conseguido dicho objetivo (estrategia metacognitiva).

En la literatura especializada se pueden encontrar dos tipos de investigaciones respecto a la clasificación antes descrita: la investigación sobre el monitoreo cognitivo y la investigación sobre el control cognitivo. Por lo cual, se generan dos posibilidades del trabajo sobre metacognición, la primera está ligada a los aspectos declarativos (saber qué) del conocimiento, y la segunda se relaciona con los aspectos procedimentales (saber cómo) del mismo.

El primer aspecto, es decir el declarativo, permite a los individuos preguntarse por sus propios conocimientos y su particular manera de adquirirlos. Este aspecto es relativamente estable para el individuo, en la medida en que el conocimiento que el sujeto tiene sobre su cognición no es algo que cambie repentinamente (Soto, 2002); Al mismo tiempo, este tipo de información es fácilmente tematizable, es posible comunicarla en un dialogo con otros. La restricción básica en su manejo se deriva del hecho de que este tipo de conocimiento se fortalece con la madurez intelectual de los individuos de tal modo que puede hablarse de “niveles” del mismo.

Por su parte, los aspectos procedimentales, le permiten al individuo tener éxito al desarrollar una tarea y al enfrentarse a un nuevo problema, y alcanzar eficiencia en sus formas rutinarias de abordar los retos propios de su contexto. Este tipo de conocimiento, no es fácilmente tematizable, en la medida en que los sujetos presentan dificultades al explicar sus propias acciones, como lo expresa Soto (2002) *“tal vez por cuanto el desarrollo de éstas depende del tipo de tarea por realizar. No existe restricción en su manejo: niños de diferentes edades, e incluso adultos, presentan habilidades para regular sus formas de aprender”*. Sintetizando el concepto de metacognición se retoma el gráfico que expone Soto (2002) en su trabajo:

GRAFICO 1. CONCEPTO DE METACOGNICION



Fuente: Tomado de Soto

Para efectos de este trabajo; dado que se enfatiza en las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas matemáticos, se centra en el segundo componente el control cognitivo (aspectos procedimentales), desde el punto de vista de estudiante aprende a hacer, dependiendo de la mediación docente. Se presta particular atención a las fases de planificación, control y evaluación en el contexto académico de la resolución de problemas matemáticos contextualizados.

3.3. Fundamentos teóricos asociadas a la metacognición

Según Martí (1995) las investigaciones asociadas al concepto de la metacognición se fundamentan sobre tres marcos teóricos, a saber: la teoría del procesamiento de la información, la teoría de Piaget y la teoría de Vigotsky.

Sobre la teoría del procesamiento de la información, y en particular, lo relacionado con el control ejecutivo. En esta perspectiva teórica se postula cualquier actividad.

Este sistema ejecutivo es en esencia un sistema de control, y tiene como fin particular que los procesos y habilidades cognitivas se llevan a cabo con eficiencia. Los teóricos del procesamiento de la información están de acuerdo con la existencia de tres tipos de procesos que están relacionados con la actividad metacognitiva, ellos son: procesos de planificación, procesos de control y procesos de evaluación. Esto implica que no solo se debe poseer conocimientos declarativos; además, es necesario saber utilizarlos y determinar su eficacia. Se enfatiza a su vez que el control debe realizarse de manera consciente, intencional y deliberada.

Ahora bien, retomando los conceptos de toma de conciencia, abstracción y procesos auto-reguladores, planteados por Piaget (1975), fundamentales a la hora de explicar cómo y porqué se construye el conocimiento. La toma de conciencia vendría a ser un proceso de conceptualización (ubicado en el plano representativo) sobre aquello que ya se ha adquirido en el plano de la acción. Esta admite distintos grados.

En cuanto a la abstracción, se trata de un proceso implícito, más básico que el anterior, que le permite al sujeto asimilar ciertas propiedades de los objetos o de las propias acciones para reorganizarlas y aplicarlas a nuevas situaciones; para Piaget, el proceso de abstracción es recurrente y aparece en cualquier etapa del desarrollo, no obstante, solo en la etapa de las operaciones formales se acompaña de una toma de conciencia.

En cuanto a los procesos de autorregulación, Piaget (2000) considera que son la clave del desarrollo cognitivo, dado que promueven una dinámica interna irreducible a la influencia tanto del medio como la programación hereditaria. Esta dinámica interna se caracteriza por la presencia de desequilibrios y nuevos equilibrios orientados por procesos de autorregulación, que le permiten al sujeto desarrollar competencias activas ante perturbaciones cognitivas de diversa índole. El sujeto, al compensar las perturbaciones mediante los procesos de asimilación y acomodación, modifica sus estructuras cognitivas y, de esta manera, genera nuevas formas de conocimiento.

La tercera perspectiva teórica es la de Vigotsky (1987), permite considerar los conceptos inter-psicológicos en el desarrollo y en el aprendizaje. Esta perspectiva permite complementar lo planteado por Piaget, reconociendo la importancia de la contribución de otras personas al aprendizaje y al desarrollo del sujeto.

Vigotsky con sus constructos de internalización y zona de desarrollo próximo, ha permitido realzar la importancia de los mecanismos inter-psicológicos en situaciones interactivas en las que participan varios sujetos, permiten a su vez la introducción de una nueva concepción de la autorregulación piagetiana, ya no solo en el plano personal sino también propiciada por otros individuos.

Se trata entonces de un proceso en el que el niño modela de manera activa las acciones de planificación, control y evaluación a partir de los aportes dados en el plano social y en los ejes de desarrollo desde el inicio del juego, del estudio y la comunicación.

Es en este proceso de autorregulación en donde intervienen el niño y un adulto, tanto en los cambios en la progresiva adopción del control por parte del niño como la acción, intencional o no, de regulación y control que realiza el adulto son un proceso complejo que se construye en la dinámica niño – adulto – actividad de regulación.

Durante la dinámica de interacción emergen dos tipos de procesos complementarios: uno de interiorización otro de exteriorización de las actividades de regulación.

En el proceso de interiorización, el niño asimila los aprendizajes que el adulto le propicia; paralelamente, ya manifestando las actividades de regulación cada vez de forma más visible y comunicable: lo anterior se denomina procesos de exteriorización. De esta manera, toda vez existe un tránsito de la actividad auto-regulativa del adulto, quien corrige, pregunta y anticipa las acciones, a una toma de conciencia y de acción por parte del niño, quien asume autónomamente estas actividades de manera auto-regulada.

3.4. Resolución de problemas contextualizados y estrategias didácticas basadas en la metacognición

Este aparte del trabajo busca explicar cómo se puede desarrollar un proceso de enseñanza – aprendizaje que conlleve a potenciar la competencia de resolver problemas matemáticos contextualizados utilizando estrategias didácticas de tipo metacognitivo. Se define entonces el proceso de enseñanza, en estos momentos desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, la cual se preocupa por hacer que los espacios y situaciones de aprendizaje, sean significativos y productivos en el aprendizaje y comprensión de la matemática, esto es lo que le da mayor relevancia a la didáctica de la matemática no solo con los conocimientos declarativos y procedimentales dados desde la escuela, sino también fuera de ella.

Si la didáctica de la matemática se asume desde la perspectiva de la ciencia cognitiva, los conceptos son el resultado del proceso cognitivo, contrario que la cognición comienza por los conceptos (Freudhental, 1991), que es en cierta medida lo que sucede en nuestras instituciones educativas. Es decir se debe iniciar el proceso de conocimiento desde espacios concretos, llevándolos de manera procesal a la estructuración de conceptos.

Otros factores que enriquecen la relación enseñanza – aprendizaje, que se relacionan con el estudio de la didáctica son: las ideas previas, los esquemas mentales, el cambio conceptual, las modificaciones que se operan en el saber durante su circulación, la posibilidad que tienen el estudiante de reflexionar sobre el saber apropiado y las estrategia que utiliza, la posibilidad de que el docente reflexione sobre su propia práctica pedagógica (reflexione acerca de su mediación), de tal modo que su intervención sea motivo de una evaluación autocrítica.

G. Brousseau (1986) define la didáctica como “la ciencia de la comunicación de los conocimientos, las condiciones de esta comunicación y las transformaciones que esta difusión produce, tanto sobre esos conocimientos como sobre sus usuarios”, a su vez define la situación didáctica como “un conjunto de actividades que se realizan en condiciones pedagógicas más exigentes”, es decir, lecciones más seguras para el docente, a la vez que más abiertas para el estudiante. Se añade que una situación didáctica debe incentivar la puesta en juego de concepciones procedimientos ya interiorizados por los estudiantes, para solucionar los problemas presentados y provocar la modificación de las ideas previas en función de los obstáculos encontrados.

La didáctica de la matemática cubre, por tanto, el estudio de las relaciones entre enseñanza – aprendizaje y todos los aspectos específicos de la matemática, incluyendo a la escuela como sistema. En ella se intenta abordar la problemática global y extensa de los procesos de enseñanza aprendizaje desde un punto de vista racional y científico, por eso esta ciencia está en permanente proceso de investigación e innovación.

En la década de los cincuenta Hans Freudenthal, incentivó un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática, en la cual manifestó su oposición a las corrientes pedagógicas - didácticas y las “innovaciones” en la enseñanza vinculadas a la matemática que se propiciaban a mediados del siglo pasado (la teoría de los objetivos operacionales; los test estructurados de evaluación; la investigación educativa estandarizada; la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo Piagetiano al aula; la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente; y la matemática “moderna” en la escuela). Proponiendo entonces las bases de lo que hoy se conoce como la corriente Educación Matemática Realista (EMR).

Este tipo de educación se basa en las siguientes ideas:

- * Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina manejo matemático) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.

- * Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Desde el punto de vista curricular la reinención guiada de la matemática, requiere de la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente. Estos contextos deberán ser estructurados de tal forma que inviten a los estudiantes a utilizar herramientas matemáticas en la vida cotidiana.

Entre algunos principios en que se basa la Educación Matemática Realista se encuentran:

Principio de actividad: la filosofía educacional de la EMR, se basa en la noción de Freudenthal de matemática como actividad humana cuya finalidad es organizar (matematizar) el mundo que nos rodea incluyendo a la propia matemática (Freudenthal, 1971).

El autor explica que el trabajo con las matemáticas, entendida como actividad de organización: “es una actividad de resolución de problemas, de búsqueda de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema. Esto puede ser un asunto de la realidad, la cual tiene que ser organizada, de acuerdo a patrones matemáticos en caso dado que los problemas de la realidad tengan que ser resueltos. También puede ser un tema matemático, resultados nuevos o viejos, los vuestros o los de otros, los cuales tienen que estar organizados de acuerdo a nuevas ideas, para comprender mejor, en un contexto más amplio o por un enfoque axiomático”.

Para Freudenthal el objetivo es matematizar la realidad cotidiana. Viéndose esto como una actividad general que caracteriza tanto a la matemática pura como a la aplicada y por tanto “matematizar” involucra tanto a la matemática como

a la realidad. Es por ello que se necesitan plantear ambientes de aprendizaje desde la “realidad”, desde la vida, cotidiana, desde la manera de pensar de los niños, para así llegar al manejo de las matemáticas.

Principio de realidad: Desde la perspectiva de la EMR, aprender matemáticas significa hacer matemáticas, una actividad mental reflexiva (Freudhental, 1991) en la que resolver problemas situados en contextos realistas, en el sentido de realizables o imaginables, es central a la tarea de trabajar las matemáticas. Sin embargo, la palabra “realista”, no se refiere sólo a la conexión con el mundo real, sino que también se refiere a las situaciones problemática que son reales en la mente de los estudiantes. El contexto de los problemas a ser presentados a los alumnos puede ser del mundo real, pero no necesariamente esto es así.

Para efectos de esta investigación solo se explicarán estos dos primeros principios de la Educación Matemática Realista, teniendo en cuenta siempre, que esta filosofía se basa en seis principios, ellos son principios de: actividad, realidad, niveles, reinención guiada, interacción e interconexión. Uno de los aspectos importantes es la creación de situaciones problemáticas basadas en la realidad de los estudiantes, para así obtener un buen desempeño en las matemáticas, contribuyendo a un aprendizaje con significado.

La resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo.

Mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante una actividad de organización de un tema. Esto puede ser un asunto de la realidad, la cual tiene que ser organizada, de acuerdo a patrones matemáticos en caso dado que los problemas de la realidad tengan que ser resueltos. También puede ser un tema matemático, resultados nuevos o viejos, los vuestros o los de otros, los cuales tienen que estar organizados de acuerdo a nuevas ideas, para comprender mejor, en un contexto más amplio o por un enfoque axiomático”.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que se piensa que no debería ser considerado como una parte aislada del currículo matemático. En consecuencia, la resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

Las estrategias en la solución de problemas, se refieren a las operaciones mentales que los estudiantes utilizan para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformar éstos en metas y alcanzar una solución. Las estrategias incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente.

Estas estrategias son en cierta medida procedimientos, entendidos estos como un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta.

Los procedimientos susceptibles de enseñanza en la escuela según Monereo (2002) se diferencian en dos niveles. Según el nivel de disciplina: Aquellos procedimientos que son propios de un cuerpo de conocimientos bien delimitados que se denomina disciplina; a su vez están los procedimientos que pueden enseñarse indistintamente en diferentes disciplinas (técnicas de estudio: mapas conceptuales, mapas mentales, matrices de doble entrada, etc.) y según el Nivel de prescripción: se dan según el grado de rigidez o flexibilidad que permitan las operaciones que se deben efectuar y el orden en que se deben ejecutar.

El siguiente esquema nos muestra estas características

Cerrados	Algoritmos	Disciplinares
Abiertos	Heurísticos	Interdisciplinares

En lo que respecta a los métodos heurísticos, los investigadores han examinado diferentes vías o enfoques posibles a seguir para alcanzar una solución: (1) buscar representaciones alternativas (Goldstein, 1980), (2) trabajar en sentido inverso, de la meta a los datos (Hayes, 1981), (3) trabajar por pasos (Mayer, 1983), (4) el análisis medios-fin, que implica dividir el problema en sub-metas e ir eliminando obstáculos con el fin de acercarse más a ellas (Mayer, 1983), (5) el razonamiento hipotético (Hayes, 1981), (6) resolver partes de un problema (Polya, 1945), y (7) buscar problemas análogos (Gick y Holyoak, 1985).

Los métodos heurísticos según Puig (1998): “lo que es propio de la heurística es el estudio de los *modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución, y calificaremos, por tanto, de «heurísticos» a tales modos y medios*”.

Ahora bien, retomando, se define entonces que el enfoque de enseñanza parte de problematizar los contextos “reales” y de esta forma los contenidos quedan relegados a un segundo plano, no por ello menos importantes, sino todo lo contrario constituyéndose para ellos un andamio que permite el aprendizaje significativo. Por eso, es importante diseñar ambientes de aprendizaje, donde las situaciones problemas sean planteadas y abordadas desde una matemática concreta, para luego pasar a una actividad de las matemáticas en abstracto.

Sin embargo, esto no es suficiente para que el niño aprenda a resolver problemas, por ello, es necesario que las estrategias didácticas en las que se base el mediador (concepto que será abordado más adelante) apunten a generar herramientas generales, para el abordaje de cualquier situación problemática sea del resorte matemático o no.

Polya (1965) consideraba que el profesor tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los alumnos la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés. Es necesario crear en clase un ambiente que favorezca la investigación, el descubrimiento, la búsqueda, la desinhibición - cuando se trate de plantear preguntas o dudas -, el respeto a los compañeros, las actitudes de colaboración... etc.

Sin embargo, la idea de Polya trasciende de solo enseñarles a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las “herramientas” que les llevarán a ello.

Esta investigación se basa en la perspectiva de las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo. Para entrar en el abordaje de las estrategias didácticas, se inicia en las estrategias del cómo aprenden los estudiantes, de las cuales dependen las anteriores, según Monereo (2002) se define “una estrategia de aprendizaje como un proceso de decisiones, consiente e intencional, que consiste en seleccionar los conocimientos, conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios para cumplimentar un determinado objetivo, siempre en función de las condiciones de la situación educativa en que se produce la acción”.

Por consiguiente, las estrategias didácticas implementadas en el aula deberán estar dirigidas a potenciar el aprendizaje autónomo. Es decir, el aprender a aprender, entre algunas de estas estrategias, utilizadas para orientar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, utilizados en esta investigación, se encuentran:

- Instrucción Directa: Tiene como objetivo proporcionar a los estudiantes indicadores sobre cómo utilizar correctamente el modelo de resolución de problema, adoptado por el docente, o cualquier otro procedimiento. Las principales características de este modelo las resumen Winograd y Hare (1998; citado por Monereo, 2002) de la siguiente manera:
 - _ Descripción de las características diferenciales que definen un procedimiento correcto.
 - _ Valoración del propósito o beneficio potencial de su utilización.
 - _ Exposición de los diferentes pasos que se deben seguir para utilizar un procedimiento
 - _ Análisis de las situaciones o circunstancias en las que el procedimiento pueda ser más útil.
 - _ Determinación de los criterios que permitan decidir la adecuación o inadecuación de la utilización de un procedimiento en una situación concreta.

La instrucción directa se utiliza para explicarles a los estudiantes los métodos heurísticos del cómo resolver problemas, se describen las diferentes cuestiones en las que hay que centrar la atención y ser cuidadosos a la hora de diferenciar entre los tipos de actividades concretas con la matemática.

- **Modelado Metacognitivo:** Es un método instruccional que tiene como objetivo que los estudiantes adquieran las estrategias, encaminándose a la “explicitación” de procesos, más que poner el énfasis en los resultados y de esta manera ir adquiriendo un comportamiento similar al de los expertos resolutores de problemas o de cualquier área del conocimiento.

Se trata entonces de hacer público el proceso de pensamiento requerido para aplicar una estrategia. Cuando el profesor(a) está resolviendo un problema, va desarrollando pasos y el estudiante solo ve sus resultados. En el caso de la aplicación del modelado metacognitivo, el experto, además de resolver paso a paso, demostrando acciones, verbaliza las operaciones mentales que va considerando en cada uno de ellos, dando cuenta a su vez de las decisiones que va tomando en el proceso (Mateos, 2001).

Algunas de las características del modelado metacognitivo según Monereo (2002) son: es un método que no pretende que los alumnos imiten o repitan una serie de acciones observadas, sino que el experto sirva de ayuda a los estudiantes en el proceso de construcción de su propio modelo de actuación, frente a la resolución de problemas en este caso.

Otra de las características es que el docente explicita que la actuación puede ser diferente en función de la demanda de la tarea, de las características del contenido, del objetivo que se persiga, o de cualquier otra variable que sea relevante para la consecución de la misma.

Entre lo que explicita el docente tendrá que incluir diferentes informaciones tales como: de qué manera decide el proceso que seguirá, qué hace frente a las dificultades que se encuentra, cómo determina la adecuación de lo que hace en los objetivos que se propone lograr, etc. Dando a entender a los estudiantes que en función de los objetivos que se persigan, de las características del contenido a aprender y de la demanda a la cual se deba dar respuesta, se tendrá que adecuar el uso del procedimiento. Por tal motivo, el modelo que se ofrece no puede ser rígido (Duffy, Roheler y Hernan, 1988; Citados por Monereo, 2002).

La secuencia lógica para establecer este método en el aula será entonces: En un primer momento el profesor resuelve solo el problema; posteriormente, lo resuelven conjuntamente el profesor y alumno, siendo el primero quien guía el proceso; En un tercer momento, siguen resolviendo el problema conjuntamente, pero es el estudiante quien guía el proceso; Por último, en el cuarto estadio, el alumno resuelve los problemas de modo independiente.

En el modelado metacognitivo el docente ha de servir de “modelo” para los estudiantes en cómo resolver problemas matemáticos, haciendo uso de los procesos metacognitivos de planeación, control y evaluación, pero no solo muestra cómo resolver los problemas correctamente, sino que también comete deliberadamente (o no) errores que va corrigiendo; y de esta manera muestra a los estudiantes el modo de autorregularse durante la solución de problemas.

El objetivo básico de este método, es proporcionarle al alumno un modelo del cómo enfrentarse a los problemas matemáticos, utilizando un vocabulario adecuado y apropiado con respecto a la situación planteada, una metodología de trabajo ordenada y lógica, y una actitud positiva hacia la tarea que el estudiante deberá aprender para luego ponerla en práctica, no solo en el contexto matemático o en las otras disciplinas, sino también en su vida diaria.

- **Práctica Guiada:** En esta fase del proceso se busca que los estudiantes practiquen el uso del procedimiento para resolver problemas, utilizando los procesos metacognitivos, aumentando progresivamente el nivel de complejidad de las situaciones planteadas, proponiendo la utilización de los procedimientos aprendidos para trabajar diferentes contenidos y situaciones diversas.

En este momento adquiere una función primordial la mediación docente, el cual deberá proporcionarles a los estudiantes la guía necesaria para ir alcanzando progresivamente un nivel más elevado de autonomía.

Para guiar esta práctica es necesario contemplar algunas condiciones (Brown y Palincsar, 1989): Adaptar la ayuda a las necesidades de los alumnos en un momento determinado, aumentar la ayuda cuando se incrementa la dificultad de la tarea y viceversa,

Disminuir gradualmente la ayuda a medida que aumenta la habilidad de los estudiantes y orientar la ayuda a corregir los errores y mejorar el nivel de competencia.

El modelo que se destaca en esta fase es el utilizado por Pifarré (1998) en la guía propuesta por este autor "la hoja para pensar el problema", la cual se estructura como una guía para el estudiante que le sirve de apoyo en el momento en que se enfrenta a una situación de este tipo, el docente a su vez va proporcionándoles a los estudiantes la retroalimentación del proceso.

La práctica guiada permite a los estudiantes aprovechar el andamiaje que les ofrece el docente, y que de esta manera puedan enfrentarse a tareas más complejas que aquellas que realizan rutinariamente.

- **Aprendizaje Cooperativo:** el objetivo principal de esta estrategia es el de promover la realización conjunta de diferentes tareas, tomando como base que la cooperación promueve el aprendizaje personal y el grupal. Es importante resaltar que para trabajar esta estrategia se debe tener en cuenta aspectos como el conocimiento previo de los estudiantes respecto al contenido que se quiere abordar, la diversidad del grupo o la planificación minuciosa de la tarea que tendrá que realizar el docente.

El aprendizaje cooperativo facilita la discusión, entre los estudiantes y el docente, permite a su vez negociar las propias opiniones y poner énfasis en los aspectos metacognitivos, favoreciendo la reflexión y la auto-evaluación.

Entre algunos principios que fundamentan el aprendizaje por grupos cooperativos planteados por Johnson y Johnson (1995) se tienen:

- _ Favorecer una interdependencia positiva entre los miembros de un grupo. Para conseguirlo se propone la formación de grupos lo más heterogéneos posibles, otorgando a cada participante una función y responsabilidad. De esta manera se favorece la cooperación y el progreso conjunto de un grupo.

- _ Durante la realización del trabajo el docente tendrá que ofrecer retroalimentación, a todo el grupo conjuntamente y cada miembro del grupo individualmente, sobre su progreso poniendo de manifiesto que, aunque se establecen responsabilidades individuales, el éxito se basa en el trabajo en equipo.

- _ Teniendo en cuenta esta responsabilidad compartida, se espera que cada miembro del grupo lleve a cabo el trabajo que se le ha asignado y colabore con los compañeros cuando lo necesiten. Esta colaboración incluye participar en el proceso de toma de decisiones, en la resolución de dudas que surgen al realizar la actividad.

- _ Es necesario que los grupos tengan tiempo de discutir, si el trabajo que está efectuando cada miembro del grupo se complementa con el de los otros y si están alcanzando los objetivos propuestos.

Por lo tanto, se trata de una estrategia que busca la interacción entre pares, en el que dentro de su desarrollo los miembros del grupo identifican tareas específicas y asignan roles para responder por dichas tareas.

El aprendizaje cooperativo promueve la colaboración y el trabajo grupal, ya que éste establece mejores relaciones con los estudiantes, aprenden más, les agrada resolver problemas, se sienten más motivados, aumenta su autoestima y aprenden habilidades sociales más efectivas al estudiar, aprender y trabajar en grupos.

Las anteriores estrategias se articulan de manera transversal con procesos de planificación, control y evaluación, que se desarrollan en las diferentes fases del programa de intervención. Los procesos metacognitivos contemplados en la intervención coinciden con los tres estadios que tradicionalmente la psicología cognitiva ha descrito en las tareas cognitivas: planificación, auto-monitoreo, y comprobación (Pintrich, 2003).

Como lo plantea Tárraga (2008): La auto-instrucción implica decirse a sí mismo qué hacer antes y durante la resolución. Esta fase equivaldría a la fase previa de la mayoría de programas de enseñanza de estrategias de aprendizaje. Podría

resumirse mediante la pregunta ¿Qué tengo que hacer?, y supondría el inicio del proceso de movilización de la estrategia de aprendizaje.

Del mismo modo, el auto-cuestionamiento o auto-monitoreo implica preguntarse a sí mismo mientras se está implicado en una actividad, con el objetivo de mantenerse centrado en la tarea, regular el proceso y asegurarse de que se está haciendo correctamente.

Esta fase se desarrolla mientras el sujeto está inmerso en la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo estoy haciendo bien?; ¿estoy siguiendo mi plan?

Finalmente, la comprobación requiere que el resolutor del problema se asegure de que todo se ha hecho correctamente a lo largo del proceso de solución del problema.

Equivaldría a la fase posterior a la realización de la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo he hecho bien?

Estas preguntas ¿qué tengo que hacer?, ¿lo estoy haciendo bien? y ¿lo he hecho bien? estarán inmersas en todo momento de la intervención del programa, el docente reiterara constantemente los procesos enmarcados en ellas, se pueden realizar ayudas nemotécnicas u otras, teniéndolas en cuenta el tiempo que sea necesario, de esta manera se contribuye al mejoramiento de los procesos metacognitivos del estudiante.

Por otra parte, para que el proceso de aprendizaje de resolución de problemas matemáticos contextualizados, donde se utilizan las estrategias anteriormente descritas, tenga éxito en los estudiantes, es importante el *rol del docente* como mediador del conocimiento.

Para Feuerstein (1981), el mediador, es quien enriquece la interacción entre el individuo y el medio ambiente; es quien trata de implicar al sujeto en su experiencia de aprendizaje, favoreciendo la metacognición, pues más que de aprender, de lo que se trata es de “aprender a aprender”. El mediador fomenta la curiosidad intelectual, la originalidad y la creatividad. Es a través de la mediación que se lleva al estudiante a auto-percibirse como sujeto activo, capaz de generar y procesar información.

Feuerstein, caracteriza la mediación desde los siguientes criterios:

La intencionalidad y la reciprocidad: En la mediación se transmiten valores porque existe una intencionalidad clara al enseñar o transmitir algo. El objetivo debe ser preciso. El mediador motivado por una intención de percepción de una cosa en particular, transforma el estímulo entregando elementos más atractivos y produciendo cambios en el estado del niño haciéndolo más vigilante y listo para comprender y lograr reciprocidad. Si el niño pierde su estado de alerta, el mediador deberá modificarse y elaborar una estrategia. La intencionalidad transforma la relación triangular: mediador, fuente de estimulación y niño, creando dentro del educando los pre-requisitos para la modificación cognitiva.

La trascendencia: Significa ir más allá de la situación o necesidad inmediata que motivó la intervención. No se refiere sólo a una generalización en otras áreas. Sino que cada situación producida en una intervención sirva para otras situaciones. (Causa-efecto). La trascendencia representa todo lo que se crea en el interior del pensamiento del individuo. Ella permite transformar los estímulos que llegan en forma directa y darles una interpretación más aislada manifestándose en conceptos que no son completamente necesarios para la tarea.

La mediación del significado: Consiste en dar sentido a los contenidos y a las alternativas pedagógicas. Es la búsqueda del porqué del razonamiento y la forma lógica de expresar el pensamiento. Representa la energía, afecto o poder emocional, que asegura que el estímulo será realmente experimentado por el niño. Va muy ligado a la intencionalidad porque: "yo mediador le atribuyo un valor especial". Feuerstein considera que no existe el objeto neutro y que es peligroso actuar como tal, transmitiendo al niño algo que no tiene significado. El significado es distinto de acuerdo a las culturas y es más honesto entregar los significados que son importantes para el mediador, ya que, dependiendo de lo que los niños entiendan, se motivarán para buscar sus propios significados. Por ello es importante, el trabajo en grupo de modo que comprendan que una misma cosa, puede tener vario significados.

Los anteriores son criterios fundamentales para que se dé una experiencia mediada, sin embargo Feuerstein (1994) agrega otros también importantes:

- Mediación del sentido de competencia cuando se trata de afianzar el sentimiento de que se “es capaz”.
- Mediación sobre el control del comportamiento, cuando se ayuda a la regulación del comportamiento, al dominio de la impulsividad.
- Mediación sobre el sentimiento de compartir, importante para la integración cognitiva y afectiva, pues al invitar al estudiante a compartir experiencias, estrategias, conocimientos y sentimientos, se lo ayuda a perfeccionar su propia percepción.
- Mediación de individualización y diferenciación psicológica, cuando se tienen en cuenta sus peculiaridades de desarrollo, de estrategias y de aplicaciones de las operaciones mentales, se atiende al proceso personal del trabajo, y a las diferencias a la variedad de respuestas.
- Mediación sobre la búsqueda, planificación y logro de objetivos, cuando se ayuda a crear en el estudiante la necesidad de trabajar según unos objetivos y a poner los medios para conseguirlos.
- Mediación de la búsqueda de novedad y complejidad.
- Mediación del conocimiento del ser humano como ser cambiante.
- Mediación del optimismo, como filosofía de vida.
- Mediación del sentido de pertenencia, como medio para hacer al niño participe del proceso.

Los anteriores criterios de mediación, dan ciertas luces sobre como debe ser el comportamiento del docente – mediador en el desarrollo de la intervención, dándole suma importancia a los tres primeros criterios, es decir, la intención clara del proceso, la trascendencia de lo que se va a aprender y la mediación del significado, para que se de un aprendizaje anclado en los procesos cognitivos del aprender a aprender.

Por otra parte, atendiendo a que el programa se basa en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, en busca de un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes, retomando las ideas de Ausbel et al (1973) y refiriéndose a lo planteado por Román y Díez (2000) se pueden distinguir en la aplicación de esta propuesta didáctica estos tres tipos de situaciones de aprendizaje, que se van dando de manera estructurada:

_ Aprendizaje repetitivo – memorístico por descubrimiento guiado. En este caso el docente se limita a orientar y enseñar estrategias técnicas, como es el caso de las estrategias cognitivas de la resolución de problemas, descuidando los conceptos y marcos de referencia. Por tanto, la mediación del profesor es metodológica no conceptual. Supone entonces una mera aplicación de técnicas y formulas para resolver problemas.

_ Aprendizaje significativo – por descubrimiento guiado. Subyace a este tipo de aprendizaje una metodología activa e investigadora. La actividad está guiada por el docente desde las perspectivas cognitivas y metacognitivas.

El docente guía al estudiante para que construya procedimientos y conceptos.

_ Aprendizaje significativo por descubrimiento autónomo. El estudiante construye sus propios conocimientos bajo diferentes modalidades, tienen claridad sobre sus objetivos y los medios para conseguirlos. Es en este nivel que se debe apuntar en la enseñanza escolar.

Lo descrito apunta entonces a que el docente como mediador, entre el conocimiento y el estudiante como sujeto cognoscente, debe preparar diferentes estrategias de enseñanza para que el aprendizaje se desarrolle de manera significativa, y dejar de darle prioridad a estrategias que apuntan a un aprendizaje memorístico, que generalmente los conocimientos solo se establecen en la memoria a corto plazo y no garantiza el desarrollo de competencias.

Hoy se defiende en diferentes contextos escolares una concepción de aprendizaje, según la cual, los discentes pueden mejorar su capacidad para aprender, usando selectivamente estrategias motivacionales y metacognitivas (Osses y Jaramillo, 2008), pero para que esto suceda los docentes deben conocer y enseñar este tipo de estrategias, las cuales buscan desarrollar el “aprender a aprender”, acompañados de ambientes de aprendizajes que propicien este tipo de competencias.

Según Monereo et al (1999) los objetivos que persiguen los docentes se pueden diferenciar en: *enseñar a sus alumnos a seguir las instrucciones al pie de la letra; conocer y utilizar de forma adecuada los procedimientos curriculares específicos de la tarea en cuestión; utilizar los procedimientos necesarios para resolver la tarea, reflexionando sobre qué hay que hacer, cómo hay que hacerlo y por qué, antes, durante y una vez terminado el trabajo.* Los dos últimos objetivos, especialmente el tercero, comparten el que los alumnos aprendan estrategias para mejorar su aprendizaje y gestionarlo de forma autónoma y eficaz.

En este caso se pretende que los docentes apliquen estrategias que permitan a los estudiantes reflexionar sobre el proceso y resultado de la resolución de problemas en matemática, aplicando a su vez diferentes ambientes de aprendizaje que permitan que el aprendizaje sea significativo.

4. METODOLOGÍA

4.1 Contextualización

La presente investigación se desarrolló en la escuela pública, ubicada en el Municipio de Copiapó, III región. En el presente año (2013) la institución cuenta con alrededor de mil estudiantes matriculados. Ofrece educación en los niveles de preescolar (jornada matinal), básica primaria (jornada completa). En el aspecto socio-económico la mayor parte de los estudiantes viven en barrios de estratos bajos, se cuenta con un 15% de estudiantes desplazados de otros establecimientos por problemas de conducta y rendimiento académico, un 6% de estudiantes pertenecientes a grupos étnicos (bolivianos, peruanos, haitianos y colombianos) En un alto porcentaje el núcleo familiar se encuentra desintegrado. Entre los empleos mayormente destacados que desarrollan los padres de familia encontramos: vendedor ambulante, comerciante y pirquineros.

4.2 Diseño metodológico

Según Hernández (2000) en los diseños cuasi - experimentales los sujetos no son asignados al azar ni emparejados, sino que dichos grupos ya están formados antes de realizar la experimentación, son grupos intactos.

Podría decirse que los diseños cuasi-experimentales ofrecen una solución de compromiso en aquellos casos en que se producen conflictos entre la validez interna y externa, o en otra dimensión, entre investigación básica y aplicada. En este contexto, y más cercano a la investigación aplicada, este tipo de diseño procura poner a prueba *la eficacia de una intervención, es decir, "probar que algo funciona"*. Dicho en otros términos, en lugar de tratar de determinar la relación causal entre una cierta acción o intervención y un resultado positivo determinado, se busca directamente el logro de dicho resultado: no se pretende hallar la causa de la mejora en una situación, sino lograr por se dicha mejora (no obstante, al tratarse de un cuasi-experimento, la certeza de que la intervención sea la causa de la mejora en el resultado no es absoluta, a diferencia del mayor grado de validez interna que podría lograrse mediante u experimento).

Por tanto, se tomaron dos grupos experimentales, a ambos se les intervino con la estrategia didáctica con enfoque metacognitivo, a uno de ellos se le aplicó pre test y pos test, al otro sólo el pos test. Se tomaron a su vez dos grupos de control, los cuales no fueron intervenidos con la estrategia, sin embargo, a uno de ellos se le aplicó el pre test y pos test, al otro solo el pos test. Los grupos experimentales y de control se escogieron de manera aleatoria.

El siguiente esquema nos muestra estas características:

Cuadro N°2. Diseño metodológico (cuasi experimental)

Grupo	Pre test	Tratamiento	Pos test
A (experimental)	0	x	0
B (Control)	0		0
C (Experimental)		x	0
D (Control)			0

Según García et al (1999), Este tipo de diseño de cuatro grupos permite establecer relaciones sobre la sensibilidad que pueda establecerse por causa de la aplicación de una prueba preliminar a los grupos, como dos de los grupos no pasan por el pretest, estos permiten la contrastación del posible efecto de sensibilización de dicha prueba, ganando así validez externa.

El diseño de cuatro grupos de Solomón, es un diseño que combina por una parte el diseño con *post prueba únicamente de control*, originando cuatro grupos: dos experimentales y dos control. La ventaja de este diseño es que es posible verificar los posibles efectos de la pre prueba sobre la post-prueba.(Hernández, 2000)

4.3 Población y muestra

La población objeto de estudio es el grado sexto, teniendo seis (6) grupos en la jornada matinal y cuatro (4) grupos en la jornada vespertina, para un total de 338 estudiantes. Para la elección de los grupos experimentales y control, fueron escogidos de manera aleatoria los siguientes: grupo 6º B, jornada matinal (Control), el grupo 6ºD jornada matinal (control), el grupo 6ºA jornada vespertina (Experimental) y el grupo 6ºC jornada vespertina (Experimental).

*Grupo experimental A: Estudiantes de sexto grado. Se le aplica la pre prueba, el programa de intervención y la post prueba.

* Grupo control B: estudiantes del sexto grado. Recibieron la instrucción que habitualmente se llevaba en matemáticas. Se le aplico pre prueba y post prueba.

* Grupo Experimental C. Estudiantes del sexto grado. Se le realizó el programa de intervención, aplicándose solamente la post prueba.

Grupo control D. Estudiante del sexto grado- Recibieron la instrucción que habitualmente se llevaba en matemáticas y solo se le aplico la post prueba.

Participantes.

Docentes: Dos maestras de básica primaria participaron en la presente investigación, implementando en sus aulas el programa de intervención y *grupo control* más el diseño de *pre-prueba con grupo pre-prueba* y *grupos post-prueba*. (Hernández, 2000).

4.4 Sistema de variables

Atendiendo a lo previsto en el objetivo general de esta investigación se identifican las siguientes variables: La variable independiente que se ha denominado para este estudio ***intervención con estrategias didácticas con enfoque metacognitivo***, enfatizando en la autoconciencia del conocimiento cognitivo, el uso de estrategias o procesos cognitivos durante la solución de problemas matemáticos contextualizados y el control de estrategias para la regulación y el monitoreo sobre los procesos que van presentando, estando a menudo asociadas con la conciencia, la evaluación y la regulación de estos. (Tárraga, 2008).

Se utiliza entonces diferentes estrategias didácticas que aporten al monitoreo constante de los procesos que se realizan al solucionar los problemas contextualizados; En la planeación de clases (este es derivado del plan general de área Anexo 7) se articulan diferentes elementos que intervienen en el proceso de enseñanza – aprendizaje, es decir en este plan se muestra el camino a seguir con el fin de desarrollar en los estudiantes diferentes competencias, que se develan en el momento que los y las discentes movilizan sus saberes cuando solucionan problemas que el contexto les presenta, sea disciplinar o de la vida cotidiana.

Los elementos conectados en la articulación, van desde los estándares de competencias brindados por el Ministerio de Educación de Chile con los contenidos y las competencias matemáticas a desarrollar, así como con los procesos, los indicadores de desempeño, a su vez con las técnicas, las actividades y los recursos. Todo evidenciado con un proceso de evaluación de la o las competencias que han ido desarrollando los alumnos. La articulación de estos componentes se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro N° 3 . Estándares y Competencias

ESTÁNDARES DE COMPETENCIAS RELACIONADOS	COMPETENCIAS MATEMÁTICAS	INDICADORES DE DESEMPEÑO
Lo que debe estar en capacidad de Saber, de pensar, resolver, saber hacer y desempeñarse el estudiante. Son criterios claros que especifican todo lo que el estudiante debe saber y debe ser capaz de hacer, a lo largo de su escolaridad	Conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotora apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. (Mineduc, 2006)	Son señales, indicios del desempeño del estudiante. Es una señal reveladora del nivel de comprensión que alcanza un estudiante sobre el tema o contenido (declarativo, procedimental o actitudinal) objeto de la enseñanza y es una herramienta ideal para medir el estado del proceso de aprendizaje.

Cuadro N° 4, Estructura del Programa

Contenidos declarativos procedimentales -actitudinales	Estrategias didácticas	Técnicas	Recursos	Evaluación
Declarativo: Conceptos requeridos para el logro del objetivo propuesto, es decir del aprendizaje esperado. Procedimental: Aplicación de los conceptos desarrollados a partir del dominio de los procedimientos propios de la disciplina. Actitudinal: Actitud de valoración y empoderamiento para actuar en contextos disciplinares y socioculturales fundamentado en los contenidos desarrollados. Carrascal (2010)	Son los procedimientos y ambientes creados y utilizados por el docente para promover aprendizajes significativos (Meyer, 2002).	Son procedimientos didácticos que se utilizan para ayudar a realizar una parte del aprendizaje que se persigue con la estrategia. Determinan de manera ordenada la forma de llevar a cabo un proceso.	Tiene que ver con el material que se va a emplear para facilitar el desarrollo de los ambientes de aprendizajes creados.	Definición de los criterios, de acuerdo a los niveles de comprensión esperados en el logro de los objetivos de aprendizaje. (Carrascal, 2010)

La variable independiente o programa de intervención tuvo una duración de 30 sesiones de 50 minutos cada una (3 sesiones semanales durante 10 semanas), realizadas en los dos grupos intervenidos de sexto grado de básica primaria de la escuela municipal de Copiapó. Se espera que con la intervención se potencie el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados en los estudiantes.

Por otra parte, se define la variable dependiente *Competencia Resolución de Problemas* tal de acuerdo con la definición del Mineduc.

El Mineduc define esta competencia en diferentes niveles de escolaridad, en la básica con la prueba SINCE (cuarto, quinto y octavo año básico). Este la define como: Capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática, traducir la realidad a una estructura matemática, desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida. Verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema. (Mineduc, 2007).

Esta competencia tiene relación estrecha con los diferentes pensamientos en que se ha dividido el pensamiento matemático, *ser matemáticamente competente* se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. (Vasco, 2006). El Mineduc agrupa los cinco tipos de pensamiento matemático en tres componentes definidos a continuación:

Numérico-variacional: está relacionado con la comprensión de los números y de la numeración.

Geométrico-métrico: involucra la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio y el elemento geométrico.

Aleatorio: hace referencia a la interpretación de datos, al reconocimiento y análisis de los mismos.

4.5 Operacionalización de la variable dependiente

Para la evaluación de esta variable se definen componentes e indicadores, describiéndose aspectos fundamentales de estas.

Cuadro N° 4 Operacionalización de la Variable Dependiente

Variable dependiente	Definición	Componente	Indicadores
Competencia resolución de problemas	Capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática, traducir la realidad a una estructura matemática, desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida. Verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema. (ICFES, 2007).	Numérico - Variacional	• Interpreta y compara distintas representaciones de un mismo número • Representa relaciones numéricas con ecuaciones e inecuaciones aritméticas sencillas • Resuelve problemas contextualizados de tipos aditivos y multiplicativos. • Resuelve problemas en contexto real de proporcionalidad en contextos multiplicativos.

		Geométrico-métrico	• Compara figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes y propiedades • Diferencia atributos medibles tales como: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa. • Resuelve problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes.
		Aleatorio	• Interpreta datos en tablas, graficas de barras y de líneas. • Conjetura y pone a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos • Resuelve situaciones problemas interpretando datos en forma organizada y aplicando la aleatorización.
		Cuantificación	De 0 a 10 puntos

4.6. Instrumento de evaluación

El test aplicado a los estudiantes contempla 10 situaciones problemas, tomadas de los cuestionarios utilizados por el Mineduc y pruebas olímpicas aplicadas a estudiantes de sexto grado básico en pruebas internacionales. Están sido pruebas aplicadas en los años 2009 en prueba SIMCE que se realizó a estudiantes de sexto grado de básica primaria en Chile.

El Mineduc define la competencia de resolución de problemas como la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática, traducir la realidad a una estructura matemática, desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida. Verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema. (Mineduc 2007).

Los componentes definidos por el Mineduc para su interpretación en el año 2007 fueron:

Numérico-variacional: está relacionado con la comprensión de los números y de la numeración, el significado del número, la estructura del sistema de numeración; el significado de las operaciones, la comprensión de sus propiedades, de su efecto y de las relaciones entre ellas; el uso de los números y las operaciones en la resolución de problemas diversos, el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa y al concepto de función.

Geométrico-métrico: involucra la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales, más

específicamente está ligado a la comprensión del espacio, al desarrollo del pensamiento visual, al análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades. Involucra el razonamiento geométrico, la solución de problemas significativos de medición, modelación, diseño y construcción. Relacionado además con la construcción de conceptos de cada magnitud longitud, área, volumen, capacidad, masa), la comprensión de los procesos de conservación, la estimación de magnitudes, la apreciación del rango, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos. El uso de unidades, la selección y uso de instrumentos, la comprensión de conceptos de perímetro, área, superficie del área, volumen.

Aleatorio: hace referencia a la interpretación de datos, al reconocimiento y análisis de tendencias, cambio, correlaciones, a las inferencias y al reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios. Más específicamente involucra la exploración, representación, lectura e interpretación de datos en contexto; el análisis de diversas formas de representación de información numérica, el análisis cualitativo de regularidades, de tendencias, de tipos de crecimiento, y la formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central y de dispersión.

El test de conocimientos matemáticos que se utilizó en esta investigación estuvo caracterizado por preguntas basadas en la competencia específica resolución de problemas y en los componentes caracterizados de la siguiente manera:

- ▣ 3 problemas pertenecientes al componente aleatorio.
- ▣ 3 problemas del componente geométrico – métrico.
- ▣ 4 problemas del componente numérico – variacional.

En un inicio el test de conocimientos matemáticos estuvo conformado por 17 problemas como se muestra en el Anexo N° 1, Este test fue revisado por dos licenciados en matemática, un magister en lingüística y un especialista en estadística, con el fin de valorar la consistencia del test y de esta manera realizarle los respectivos ajustes.

Sin embargo luego del primer pilotaje del test, se estableció que la prueba era demasiado larga para los niños de sexto grado, llegando a tal punto que los últimos 4 problemas los contestaron sin siquiera leer el enunciado de estos.

Cuando se realizó el análisis estadístico utilizando el alfa de Crombach resultó que la prueba tenía poca confiabilidad, el alfa igual a 0.5133 mostraba que se debían realizar ciertos ajustes al test.

Statistics for Mean Variance Std Dev Variables
SCALE 42,0000 35,4545 5,9544 16
Reliability Coefficients
N of Cases = 12,0 N of Items = 17
Alpha = ,5133

Este primer pilotaje realizado a doce estudiantes de otra escuela municipal perteneciente al municipio de Copiapó, permitió reestructurar la prueba en la cantidad de problemas a evaluar, y a su vez ajustar la prueba en algunos ítems.

El alfa de Cronbach es una medida estadística que toma valores entre 0 y 1, el cual emplea el promedio de todas las correlaciones existentes entre los ítems del instrumento que tributan al concepto latente que se pretende medir, cuanto más se aproxime a su valor máximo, 1, mayor es la fiabilidad de la escala. Además, en determinados contextos y por tácito convenio, se considera que valores del alfa superiores a 0,7 o 0,8 (dependiendo de la fuente) son suficientes para garantizar la fiabilidad de la escala. (Hernández, 2000).

El segundo pilotaje aplicado a 14 estudiantes de una tercera escuela del municipio de Copiapó, resultó con mejores resultados mostrándose entendible para los estudiantes sujetos finales de la investigación y con el número de ítems adecuado para su valoración (Anexo 2). El alfa de Cronbach para este test se muestra en la siguiente tabla.

Statistics for	Mean	Variance	Std Dev	Variables
SCALE	28,7857	32,3352	5,6864	10

Reeliability Coefficients N of Cases = 14,0 N of Items = 10 Alpha = ,7344
--

Atendiendo a que el coeficiente alfa de Cronbach, toma valores entre 0 y 1, donde el acercarse a 1 estima una alta confiabilidad, se puede considerar el resultado del segundo pilotaje con una confiabilidad moderada en cuanto se acerca discretamente a 1, mostrando una correlación lineal entre los Ítems del instrumento.

Luego de haber aplicado el instrumento, fue nuevamente sometido a la valoración de expertos, para que juzgaran la relación existente entre los componentes que se evalúan en la prueba, como son: Numérico – Variacional, Geométrico – Métrico y Aleatorio, en la estimación de la competencia Resolución de problemas, teniendo en cuenta la conceptualización que el Mineduc utiliza en cada uno de ellos. Los indicadores de cada componente se describen a continuación:

Cuadro No. 5. Indicadores-Componentes (Mineduc)

Componentes	Indicadores
Numérico - Variacional	• Interpreta y compara distintas representaciones de un mismo número • Representa relaciones numéricas con ecuaciones e inecuaciones aritméticas sencillas • Resuelve problemas contextualizados de tipos aditivos y multiplicativos. • Resuelva problemas en contexto real de proporcionalidad en contextos multiplicativos.
Geométrico – métrico	• • Compara figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes y propiedades • Diferencia atributos medibles tales como: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa. • Resuelve problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes.
Aleatorio	• Interpreta datos en tablas, graficas de barras y de líneas. • Conjetura y pone a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos • Resuelve situaciones problemas interpretando datos en forma organizada y aplicando aleatoria

En lo concerniente a la variable resolución de problemas y a los distintos componentes de la competencia matemática que la describen, se tiene que en el componente numérico – variacional, los ítems que la miden son los siguientes: 1, 2, 6 y 8;

Para el componente Geométrico – métrico son los ítems N° 3, 4 y 5; para el componente Aleatorio se tiene que los ítems son 7, 9 y 10. En la siguiente tabla se muestra la confiabilidad de acuerdo al conjunto de ítems

Cuadro No. 6. Indicador de Fiabilidad

Componente y número de ítems	Fiabilidad
Componente Numérico – variacional ítems 1, 2, 6 y 8	0, 7256
Componente Geométrico – Métrico ítems 3, 4 y 5	0, 8546
Componente Aleatorio ítems 7, 9 y 10	0, 6436
Total	0, 7344

El coeficiente de alfa de Cronbach es un estadístico que fluctúa entre 0 y 1, si el alfa toma el valor de 0 la confiabilidad es nula y si el alfa toma el valor de 1 la confiabilidad es total, por lo tanto en la prueba aplicada el conjunto de ítems perteneciente a los componentes Numérico – Variacional y Aleatorio, con puntajes de 0,7256 y 0,6436, se encuentra que la prueba es moderadamente consistente, y la prueba en el componente Geométrico – Métrico (0,8546) presenta una consistencia alta, teniendo en cuenta que se acerca mayormente a 1. La prueba en su totalidad presenta una confiabilidad moderada.

La evaluación de los tres componentes se llevó a cabo en dos momentos diferentes:

- Pre test: antes de la aplicación del programa.
- Pos test: inmediatamente tras finalizar el programa.

Para evitar el sesgo derivado del aprendizaje que se produce al realizar una prueba en repetidas ocasiones, se realizó un cambio en la post-prueba en el orden de las preguntas iniciales y en algunas preguntas del mismo componente, del mismo nivel de resolución de problema y con manejo matemático idéntico.

4.7 Variables

Cuadro No. 7. Operacionalización de las variables

OPERACIONALIZACION DE LAS VARIABLES				
Tpos de variable	Definición Nominal	Definición conceptual	Definición operacional	Ítems
Independiente	ESTRATEGIAS DÁCTICAS CON ENFOQUE METACOGNITIVO	Enfatizan la autoconciencia del conocimiento cognitivo, el uso de estrategias o procesos cognitivos durante la solución del problema y el control de estrategias para la regulación y el monitoreo, estando a menudo asociadas con la conciencia, la evaluación y la regulación de los procesos. (Tárraga, 2008)	Estructura del programa de intervención	1,6
dependiente	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS POR COMPONENTES	Se relaciona, con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de la matemática, traducir la realidad a una estructura matemática, desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida. Verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema. (Mineduc 2007).	Diferencias entre medias del PRETEST Y EL POSTEST DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS (TCM). CAMBIOS EN LA PUNTUACIÓN del COMPONENTE NUMERICO - VARIACIONAL. CAMBIOS EN LA	1-2-6-8

			PUNTUACIÓN del COMPONENTE GEOMETRICO METRICO	3-4-5
			CAMBIOS EN LA PUNTUACIÓN del COMPONENTE ALEATORIO	7-9-10

4.8 Equivalencia inicial entre los grupos. Control de variables

Para comprobar que los grupos eran inicialmente equiparables en una serie de variables de control se ha puesto a prueba la igualdad por medio de pruebas no paramétricas, estas no se basan en la suposición de normalidad de la distribución de probabilidad a partir de las que fueron obtenidos los datos.

Teniendo en cuenta que en ciertas situaciones como la de esta investigación, resulta arriesgado suponer la normalidad de los grupos, entre algunas de las pruebas no paramétricas utilizadas para la comparación de variables fueron la de Kruskal-Wallis, la cual representa la alternativa de la ANOVA de un factor completamente aleatorizado y la de Mann-Whitney. Todos los análisis estadísticos se han realizado utilizando en el paquete estadístico SPSS versión 10.

Para comprobar los supuestos necesarios para la realización de las técnicas de comparación entre-grupos e intra-grupos, se comprueban una serie de requisitos previos para probar que los grupos eran equivalentes en edad se realizó la prueba de Kruskal- Wallis en la que se corroboró que la edad en los cuatro grupos no presenta diferencias estadísticamente significativas ($\chi^2 = 1.864$, $p = 0.601$).

Cuadro Nº 8. Equivalencia entre grupos según la edad.

Rangos		
Grupos	N	Rango promedio
grupo A	31	62,37
grupo B	35	61,46
grupo C	30	67,22
grupo D	34	71,00
Total	130	

Estadísticos de contraste (ab)

	Edad
Chi-cuadrado	1,964
gl	3
Sig.asintót.	.601

- a. Prueba de Kruskal-Wallis.
b. Variable de agrupación: Grupos
Fuente: Resultados Analisis SPSS 10.

4.9 Sistema de hipótesis

4.9.1 . Hipótesis General

La implementación de un programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo influye en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de 6° de primaria del Mineduc.

4.9.2.. Hipótesis específicas

▣ Las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo influyen en la resolución de problemas matemáticos pertenecientes al componente numérico – variacional.

▣ Las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo influyen en la resolución de problemas matemáticos pertenecientes al componente geométrico – métrico

▣ Las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo influyen en la resolución de problemas matemáticos pertenecientes al componente aleatorio.

4.9.3. Hipótesis Estadísticas

General

H0: No existe diferencia estadísticamente significativa en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos antes y después de la implementación de un programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

H1 : Si existe diferencia estadísticamente significativa en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos antes y después de la implementación de un programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

Específicas

1 - H0: No existe diferencia estadísticamente significativa en la resolución de problemas matemáticos del componente numérico - variacional antes y después de la implementación del programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

H1 : Si existe diferencia estadísticamente significativa en la resolución de problemas matemáticos del componente numérico - variacional antes y después de la implementación del programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

2 - H0: No existe diferencia estadísticamente significativa en la resolución de problemas matemáticos del componente geométrico – métrico antes y después de la implementación del programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

H1 : Si existe diferencia estadísticamente significativa en la resolución de problemas matemáticos del componente geométrico – métrico antes y después de la implementación del programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

3 - H0: No existe diferencia estadísticamente significativa en la resolución de problemas matemáticos del componente aleatorio antes y después de la implementación del programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

H1 : Si existe diferencia estadísticamente significativa en la resolución de problemas matemáticos del componente aleatorio antes y después de la implementación del programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en estudiantes de 6° de la escuela municipalizada de Copiapó.

4.10. Programa de intervención

La intervención llevada a cabo en esta investigación se fundamenta en una extensa línea de investigación referente a las diferencias en solución de problemas de matemáticas entre estudiantes que tienen un buen rendimiento en solución de problemas y alumnos con dificultades de aprendizaje.

En particular son dos los supuestos básicos que constituyen el enfoque central y que dan un andamio teórico a la intervención de esta tesis:

- a. El conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas, a través de la aplicación de modelos, permite que el estudiante desarrolle esta habilidad. (Polya, 1981; Mayer, 2002; Schoenfeld, 1985; Mason et al, 1989; De Guzmán, 1991; Pifarre et al, 1998; Tárraga, 2008).
- b. Los alumnos con deficiencias en la resolución de problemas pueden mejorar su rendimiento con una instrucción adecuada basada en el entrenamiento en el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas de las que carecen. (Schoenfeld, 1985; Pifarre et al, 1998; Tárraga, 2008).

De forma paralela se encuentra la línea de investigación que se ha venido gestando a partir de realizar una matemática contextualizada y realista, que pueda ser entendida por todos, es decir una matemática para todos (Freudhental, 1991; Brousseau 1986; Puig, 1998), diseñando ambientes de aprendizaje por el mediador, que coadyuven a obtener un aprendizaje significativo por parte del educando. La conjunción de estos enfoques de investigación permitió la creación de un programa de intervención, basado en la creación de ambientes de aprendizaje contextualizados y en la enseñanza adecuada de estrategias cognitivas y metacognitivas para resolver problemas.

Por lo tanto en el programa se diferencian dos tipos de estrategias, las cognitivas, que se dan de acuerdo al modelo de resolución de problema tomado, y las metacognitivas que son transversales del proceso.

Las estrategias cognitivas se refieren a las acciones o pasos que el estudiante debe ir dando para solucionar el problema: las cinco estrategias cognitivas que se proponen en esta intervención son: Entender y analizar el problema; Planificar una estrategia para resolver el problema; Organizar los datos y el plan de resolución en un organizador de información, Resolver el problema; Evaluar el resultado del problema.

Por otra parte, el concepto de metacognición incluye el conocimiento sobre la naturaleza de las diferentes tareas cognitivas, las posibles estrategias que pueden ser aplicadas a la solución de cada tarea, y también las habilidades para monitorizar y regular las actividades cognitivas propias (Flavell, 1999).

En este programa se proponen tres estrategias metacognitivas que ayuden a los alumnos a auto-dirigir, controlar y evaluar sus procesos de resolución de tareas. Estas estrategias son: decirse a sí mismo lo que tienen que hacer en forma de auto-instrucción, preguntarse a sí mismo si están siguiendo su plan, y comprobar que el resultado es correcto y está acorde con su plan.

4.10.1 Estrategias Cognitivas

1. Leer el problema: mediante la enseñanza de esta estrategia se intenta que el estudiante realice una lectura detenida y consiente del enunciado, dejando claro que el objetivo fundamental de la lectura es comprender lo mejor posible su significado. Se trata de intentar que el alumno intente formar una idea clara del problema asegurándose de que comprende dos aspectos del enunciado: la información que aparece y la información que se nos solicita. Igualmente se enseña al alumno a controlar si está comprendiendo correctamente, y a releer el problema (o alguna de sus partes) en caso de que no haya comprendido el enunciado.

2. Planificar una estrategia para resolver el problema: se busca enseñar a los estudiantes a trazarse un plan a través de diferentes representaciones. A su vez, se le enseña al estudiante a pensar sobre las acciones que debe llevar a cabo para solucionar el problema. Se enseña al estudiante a marcarse una meta de solución, una vez detectado lo que el problema pide, y después se le enseñan diversos caminos para obtener su resultado. Se enseña al alumno a realizar razonamientos

del tipo “si hago...entonces obtendré...”, en los que se frena la impulsividad, y a decidir las operaciones que tiene que seleccionar.

3. Organizar los datos en un organizador de información: Se le enseña a los alumnos a organizar la información que tienen y que se busca través de alguna representación, por lo tanto el alumno puede realizar representaciones geométricas, diagramas, tablas, figuras o cualquier otro tipo de representación pictórica o gráfica en la que quede reflejada la estructura del problema, la información que ofrece el enunciado, la información que nos demanda y el trazado de un plan para su posible resolución. Estas imágenes esquemáticas o relacionales son claves para una solución de problemas exitosa.

4. Resolver el problema: Se enseña a los estudiantes a realizar las operaciones de manera consciente, aplicando reglas de la aritmética siguiendo el plan anteriormente elaborado. Este proceso requiere de conocimiento procedimental, necesario para hacer efectivos los procedimientos que se han planificado en la fase anterior.

5. Evaluar el resultado del problema: Esta es una estrategia que subraya la importancia de enseñar la solución de problemas como un proceso recursivo en el que los estudiantes comprenden que volver a los procesos previos y en ocasiones trabajar hacia atrás son necesarios para la solución de problemas. Comprobar la exactitud del cálculo es importante. Evaluar el problema implica verificar tanto el proceso como el producto; se enseña a los estudiantes cómo comprobar el proceso de resolución para asegurarse de que lo han comprendido, lo han representado adecuadamente, han elegido la vía de solución correcta y lo han resuelto correctamente.

4.10.2 Estrategias Metacognitivas

En la investigación realizada por Tárraga (2008) se utilizan tres estrategias de tipo metacognitivo que resultan propicias para la intervención, basados en la planificación, el auto-monitoreo y la comprobación.

Según Tárraga “las estrategias metacognitivas difieren de las cognitivas en que enfatizan la autoconciencia del conocimiento cognitivo, el uso de estrategias o procesos cognitivos durante la solución del problema y el control de estrategias para la regulación y el monitoreo, estando a menudo asociadas con la conciencia, la evaluación y la regulación de los procesos”, lo cual es coherente con lo aplicado en esta intervención.

Por lo tanto, se examinan las siguientes estrategias dentro de la intervención:

La auto-instrucción implica decirse a sí mismo qué hacer antes y durante la resolución. Esta fase equivaldría a la fase previa de la mayoría de programas de enseñanza de estrategias de aprendizaje. Podría resumirse mediante la pregunta ¿Qué tengo que hacer?, y supondría el inicio del proceso de movilización de la estrategia de aprendizaje.

El auto-cuestionamiento o auto-monitoreo implica preguntarse así mismo mientras se está implicado en una actividad, con el objetivo de mantenerse centrado en la tarea, regular el proceso y asegurarse de que se está haciendo correctamente. Esta fase se desarrolla mientras el sujeto está inmerso en la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo estoy haciendo bien?; ¿estoy siguiendo mi plan?

Finalmente, la comprobación requiere que el resolutor del problema se asegure de que todo se ha hecho correctamente a lo largo del proceso de solución del problema.

Equivaldría a la fase posterior a la realización de la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo he hecho bien?

El siguiente cuadro (Adaptación del trabajo de tárraga, 2008), muestra las estrategias cognitivas y metacognitivas usadas en la intervención, es importante resaltar que a medida que los estudiantes van desarrollando las diferentes fases de la intervención estas estrategias se van internalizando y como se verá al tratar la metodología de enseñanza, cada vez se van haciendo más propia e implícitas, es decir, el alumno las va internalizando y no es necesario mencionarlas explícitamente cada vez que se ponen en marcha.

4.11. Metodología del programa

El programa se realiza en las siguientes fases:

En una fase preliminar se realiza la preparación de los docentes, lo cual es fundamental para la aplicación de la intervención. Para la formación del profesorado, se tuvieron en cuenta procedimientos y recursos en los cuales se promueva el aprendizaje significativo y el uso de estrategias metacognitivas que apunten al control y autorregulación de los procesos cognitivos que se utilizan para resolver problemas. Esta formación se desarrolló en el marco de 6 encuentros de formación continua, para los docentes que están a cargo de los grupos experimentales (2 docentes), cada encuentro requirió de una duración de dos horas y media. El responsable de impartir dicho curso fue la coordinadora de la investigación.

En primer lugar, se realizó una prueba diagnóstica, con el fin de identificar falencias de tipo disciplinar en el contexto de la matemática escolar en el grado en que se están desempeñando los docentes, se encontraron deficiencias en los componentes aleatorio y geométrico-métrico. En este primer encuentro se explican los objetivos del programa de intervención con respecto al desarrollo de la competencia resolución de problemas y a la inserción de la dimensión metacognitiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje, a su vez se relaciona la planeación con respecto a la intervención.

En los siguientes encuentros, se inician los procesos de cualificación en las estrategias didácticas a utilizar, tanto de carácter cognitivo para resolver problemas, como aquellas de tipo control del proceso (metacognitivo), según Osses y Jaramillo (2008) *“para formar estudiantes metacognitivos es necesario contar con educadores metacognitivos”*, por tanto los docentes deben adecuar sus prácticas pedagógicas planificando, controlando evaluando. Por tanto, se dan en estos encuentros las bases conceptuales de las etapas que suponen esta metodología de trabajo.

En los dos encuentros finales se estudian los conceptos y procedimientos para realizar ambientes de aprendizaje y la importancia de estos en la adquisición del aprendizaje significativo.

Las fases generales que rigen el desarrollo del programa de intervención, en las *del aprendizaje, esta concibe al docente en el papel de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del discente*. Las fases desarrolladas son las siguientes:

- Fase inicial: instrucción directa. (Winograd y Hare; 1998; Duffy, Roehler y Mason, 1984; citados por Monereo, 2002)
- Segunda fase: modelado metacognitivo. (Mateos, 2001)
- Tercera fase: práctica guiada. (Pifarré, 1998)
- Fase final: aprendizaje cooperativo. (Johnson y Johnson, 1995) cuales se preparó tanto a estudiantes como a docentes, se dio de la siguiente manera, se ajusta al modelo adelantado por Tárraga (2008), también es una adaptación de lo propuesto por Mateos (2001), inspirada básicamente en la *filosofía de la transferencia gradual del control*

Como se muestra en el siguiente esquema:

Grafico 2. Esquema de la intervención



Como se puede observar cada fase fue mediada por ambientes de aprendizaje creados desde la contextualización matemática, y a su vez de los procesos cognitivos y metacognitivos definidos anteriormente.

La primera fase de intervención, la instrucción directa de proporcionar a los estudiantes indicadores sobre cómo utilizar correctamente el modelo de resolución de problema, adoptado por este programa de intervención, el cual está basado en la presentación de las estrategias cognitivas de cómo matemáticos contextualizados, las cuales son: Entender y analizar el problema; Planificar una estrategia para resolver el problema; Organizar los datos y el plan de resolución en un organizador de información; Resolver el problema; Evaluar el resultado del problema.

Esta debe dar cuenta según Osses y Jaramillo (2008) de las estrategias que se van a enseñar y de cada una de sus etapas. La explicación debe procurar conocimientos declarativos (saber qué), procedimentales (saber cómo) y condicionales (saber por qué). Una mayor conciencia de estos aspectos puede redundar en una aplicación más flexible de las mismas.

En esta misma fase se busca que el estudiante comprenda la importancia de resolver problemas en la vida cotidiana, y sus diferentes situaciones problemáticas que se les presentan en la escuela. A su vez, se exponen los diferentes pasos que se deben seguir para enfrentarse a un problema, resolverlo y atender a las condicionales (saber cuándo, enfatizando que no se tomen los pasos como recetas de cocina, sino que reflexionando, utilizando las preguntas que guían la auto-instrucción, el auto-cuestionamiento y la comprobación, mediante todo el proceso de resolución.

Por lo anterior, la instrucción directa se utiliza para explicarles a los estudiantes los métodos heurísticos del cómo resolver problemas, en las que se describen las diferentes cuestiones en que hay que centrar la atención y ser cuidadosos a la hora de diferenciar entre los tipos de actividades concretas de trabajar con las matemáticas.

Se aclara que en esta fase los problemas que se utilizaron fueron contextualizados a la realidad de los estudiantes, por ejemplo:

En una tabla como la que se muestra seguidamente, el dueño de la panadería "Las Delicias" (panadería cercana a la institución y que los estudiantes conocen y visitan), lleva el registro semanal de los panes que se hornean cada día.

Días de la semana	° de panes por hornear
Lunes	150
Martes	385
Mercoles	296
Jueves	455
Viernes	196
Sábado	148
Domingo	256

Fuente: Clase de matemáticas

Se realizan las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles es el día que se hornean más panes?
- ¿Qué día se hornea el doble de panes que el sábado?
- Si al señor José le encargan el triple de panes de los que hornea el viernes ¿Qué cantidad deberá hornear?
- ¿Cuál es el promedio de panes que horneó el señor José en la semana?
- ¿De qué forma sería mejor representar los datos de la tabla?

Todas estas preguntas llevaron a la construcción de conceptos tales como la moda, la media aritmética, graficación de datos, organización y análisis de los mismos.

Lo cual permitió también que tuvieran significado para los estudiantes, atendiendo a los principios de la matemática realista planteada por Freudenthal.

La segunda fase de la intervención es el modelado metacognitivo, aquí el docente ha de servir de “modelo” para los estudiantes en cómo resolver problemas matemáticos, haciendo uso de los procesos metacognitivos de planeación, control y evaluación, pero no solo muestra cómo resolver los problemas correctamente, sino que también comete deliberadamente errores que va corrigiendo; y de esta manera muestra a los estudiantes el modo de auto-regularse durante la solución de problemas.

En las primeras tres sesiones de clase el docente resuelve los problemas planteados mostrando cómo se debe enfrentar la situación, siempre reiterando en el proceso la puesta en escena de la preguntas metacognitivas; en las tres segundas sesiones ya el docente resuelve los problemas acompañado de los estudiantes, guiando el proceso por medio de preguntas orientadoras; por último el docente le otorga totalmente el protagonismo al estudiante, sin dejar de mediar en el aula.

Esta fase complementa la anterior que se ofrece a través de la explicación del docente, éste modela tanto la actividad cognitiva como la metacognitiva que lleva a cabo durante la solución de un problema. En este modelado se sustituyen las conductas observables a imitar, características del modelado conductual, por acciones cognitivas y metacognitivas que son expresadas verbalmente por el docente. Se trata de modelar, no sólo las acciones cognitivas implicada en la resolución de problemas, sino también las actividades metacognitivas de planificación, supervisión y evaluación de las primeras. (Mateos, 2001)

Para esta fase se creó un ambiente de aprendizaje al que se le denominó “hagamos una fiesta”, se le planteó a los estudiantes realizar una fiesta a lo que accedieron rápidamente, sin embargo la situación no era tan fácil, cuando se les pidió que la debían organizarla ellos.

Se inician entonces los planteamientos del cómo organizarla, que se iba a brindar de plato fuerte, llegando a la conclusión que sería bueno realizar un arroz con pollo, pero ¿Cuánto se debía hacer?, ¿Qué se necesitaba para hacerlo?, ¿Cuánto dinero se gastaba?, ¿Dónde se podrían comprar los ingredientes más baratos? ¿Cuánto dinero le correspondía aportar a cada estudiante?, en fin muchas incógnitas que debían resolverse y que no era en una sola clase que se podría realizar, es decir, el problema no era posible resolverlo inmediatamente, ni tampoco por medo de simples algoritmos. El primer cuestionamiento a resolver fue ¿Qué ingredientes lleva un arroz con pollo?, para no presentar distintas respuestas a este interrogante se decidió con el grupo averiguar en el comedor de la institución los ingredientes que las cocineras utilizaban para preparar 10 porciones de arroz con pollo, para así poder comenzar a averiguar los precios.

El listado de ingredientes quedó de la siguiente manera: 1 libra de arroz, 1 libra de pechuga, 1 libra de zanahoria, 1 libra de pimentón, 1 libra de cebolla larga, $\frac{1}{2}$ litro de aceite, una bolsa de 500 gramos de salsa de tomate y una lata de arveja.

Luego de obtener la información, se les oriento a los estudiantes que averiguaran los precios de los ingredientes, en una de las tiendas que les quedara más cercana a su casa. Se aclara que se les entregaron tres formas diferentes de representación de los datos, es decir se crearon tres listados equivalentes. Esto se informa en los anexos.

Al obtener los listados diligenciados por los estudiantes se creó un solo instrumento del cual salió una situación problema (Anexo 3) que los estudiantes debían resolver aplicando la estrategia aprendida con el docente desde el modelado metacognitivo.

Los estudiantes mostraron mucha motivación e interés al tratar de resolver la situación problema planteada. Lo más importante es que realizaron los problemas planteados de una manera reflexiva, tomando decisiones de manera consciente de lo que estaban haciendo, dejando a un lado la aplicación de algoritmos como receta de cocina.

La tercera fase es la práctica guiada, aquí se busca que los estudiantes practiquen el uso del procedimiento para resolver problemas, utilizando los procesos metacognitivos, para esta fase se retomo "la hoja para pensar el problema" de Pifarré (1998), a la cual se le realizaron los respectivos ajustes, teniendo en cuenta los momentos utilizados para resolver problemas matemáticos planteados en esta intervención.

El docente, proporciona a los estudiantes la guía necesaria para ir alcanzando progresivamente un nivel de autonomía más elevado, en un primer momento el docente explica la utilización de la Hoja Guía, a la cual los estudiantes le llamaron "la Hoja inteligente" (Anexo N° 6), atendiendo a las preguntas que la hoja iba orientando.

Esta práctica se realiza con la colaboración del docente quien conduce y ayuda al estudiante en el camino hacia la autorregulación. Esta fase se caracteriza por el diálogo entre profesor y estudiante, cuyo fin último es de mediar entre las metas que se requieren alcanzar y que están por fuera de las posibilidades de los estudiantes sin esa ayuda. (Osses y Jaramillo, 2008)

Se propusieron diferentes problemas con respecto a la situación de aprendizaje diseñada, los estudiantes resolvieron dichos problemas utilizando la hoja guía de manera individual, para luego exponer sus estrategias de resolución y los resultados a todo el grupo.

Como primera parte: Introducción de la guía "Hojas para pensar el problema". El profesor presenta las características de la guía y se establece un diálogo con la clase en la que se valora, por un lado, los procedimientos que la guía propone y que ya son utilizados por los alumnos (conexión con los conocimientos previos de los estudiantes), se especula sobre las ventajas y los inconvenientes de realizar los procedimientos que propone la guía.

Luego, se pasa a la Instrucción guiada: Modelaje por parte del profesor sobre cómo utilizar la guía como instrumento de ayuda para pensar y resolver el problema. En este método, el profesor piensa y resuelve un problema en voz alta realizando las diferentes acciones que se proponen en la guía.

Por último, cada estudiante resolverá diferentes problemas utilizando la hoja guía. La estructura de la hoja inteligente es que por cada estrategia cognitiva aplicada para resolver el problema, se deben resolver un número de cuestionamientos, para que de esta manera el estudiante vaya tomando conciencia de los procesos que está realizando.

Para esta fase, los estudiantes resolvieron otra situación problema que se deduce del mismo ambiente de aprendizaje "hagamos una fiesta", al haber solucionado el problema del plato fuerte de la fiesta (el arroz con pollo), se establece que falta el liquido que acompañará la comida principal. Por lo tanto, se debe averiguar qué cantidad de gaseosa se comprará para repartir en la fiesta.

Para el diseño de la situación que se denominó “a tomar gaseosa” (Anexo N° 4), se les pidió a los estudiantes que trajeran por equipos de cinco, un balde y tres botellas de gaseosa plásticas de diferentes tamaños, los más utilizados fueron de 600 ml, 1.25 litros y de 2.5 litros, clasificándolos en pequeño, mediano y grande respectivamente.

Se les entregó el día de la práctica tres vasos desechables de diferentes tamaños, de 5 onzas, 7 onzas y 12 onzas. El objetivo del taller era establecer un andamiaje para la construcción del concepto de fracciones y de números decimales. Los estudiantes resolvieron el problema utilizando la hoja inteligente, que con anterioridad el docente le había explicado, analizando otros problemas matemáticos contextualizados.

La última de las fases es el aprendizaje cooperativo, el cual utilizado como estrategia didáctica, promueve la realización conjunta de diferentes tareas, tomando como base que la cooperación puede mejorar el aprendizaje personal y el grupal.

Esta fase según Mateos (2001), proporciona una fuente adicional de andamiaje al aprendizaje individual. Se lleva a cabo en el contexto de la interacción con un grupo de iguales que cooperan para completar la tarea. El control de la actividad se traslada al grupo para distribuirse entre sus miembros.

En esta fase el docente conforma los grupos de manera heterogénea, es decir un estudiante con alto desempeño, acompaña estudiantes con desempeños medios y bajos, esto con el fin de establecer las relaciones entre pares y potenciar el aprendizaje. Cada miembro del grupo cumple con un rol y una responsabilidad, la cual deberá ser cumplida para beneficio de todo el equipo. El aprendizaje cooperativo facilita la discusión, entre los estudiantes y el docente, permite a su vez negociar las propias opiniones y poner énfasis en los aspectos metacognitivos, favoreciendo la reflexión y la auto-evaluación.

Para esta última fase se creó un segundo ambiente de aprendizaje, el cual se llamó “embaldosemos la cancha” (Anexo N° 5), El objetivo principal de este ambiente es de crear situaciones problemas encaminadas al trabajo con los conceptos geométricos de perímetro y área. Se les pidió a los estudiantes que trajeran una cinta métrica, la cual serviría para medir la cancha de basketbol de la institución, y de esta manera poder resolver el taller, este trabajo se realizó en grupos de tres estudiantes, guardando el principio de heterogeneidad de los equipos.

5. ANALISIS ESTADISTICO E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Al iniciar la puesta en marcha del programa de intervención se realizó una prueba preliminar para demostrar que no existían diferencias significativas entre los grupos en los que fue aplicado el pre test, siguiendo el diseño metodológico propuesto, por tanto el resultado del pretest, prueba en los dos primeros grupos la equivalencia inicial, con respecto a la resolución de problemas matemáticos. Se realizó la prueba de Mann-Whitney, en la que se corroboró que la puntuación obtenida en el pretest no existen diferencias estadísticamente significativas ($Z = 0.772$, $p = 0.440$).

Cuadro N° 13 Comparación resultados del pretest, Grupos A experimental y B Control Rangos

Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Puntaje Grupo A experimental pre y	31	35,40	1097,50
Grupo B control	35	31,81	1 119,70
Pre			
Total	66		

Estadístico de contraste (a)

	Puntaje
U de Mann-Whitney	483,500
W de Wilcoxon	1113,500

Z	-772
Sig.asintot. (bilateral)	.440

(a) Variable de agrupación: Grupos
Resultados SPSS 10

En el cuadro Nº 11, se establece la no existencia de diferencias significativas de los grupos que realizaron el pre test, lo que significa que estos grupos son equivalentes en cuanto al desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados; el resultado corrobora lo descrito por los docentes, en cuanto a las deficiencias que tienen los estudiantes al resolver este tipo de problemas. A su vez, en correspondencia de los indicadores de desempeño establecidos en la prueba, según los componentes del pensamiento matemático, se establece que los estudiantes presentan dificultades en cuanto a los siguientes indicadores: interpretación y comparación de distintas representaciones de un mismo número (como fracción, como decimal o como natural); resolver problemas en contexto de tipo aditivo y multiplicativo; resolver problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes; interpretar datos en tablas, gráficos de barra, pictogramas y de líneas; resolver problemas interpretando datos en forma organizada y aplicando aleatoria.

Seguidamente de la aplicación de la intervención basada en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, donde se les enseña a los estudiantes a aplicar estrategias cognitivas y metacognitivas que apoyen el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados, se realizan los análisis de los resultados obtenidos en el pre test.

Para evaluar los efectos del tratamiento se han realizado una serie de pruebas estadísticas no paramétricas, tal como la prueba de signos para el análisis intra-grupo, la prueba de Mann-Whitney para el análisis inter-grupos, se han puesto a prueba los efectos principales de las variables grupo y momento de la evaluación.

Al tener en cuenta el diseño investigativo de cuatro grupos entre los análisis que pueden llevarse a cabo se tiene:

- En un primer momento establecer si existen o no diferencias estadísticamente significativas en el puntaje del pre test y el pos test, intra-grupo de los grupos A (experimental) y B (control) del diseño, para observar si tuvo efecto el tratamiento empleado, se realizó una prueba de signos. A su vez, se estudian los efectos que se hayan obtenido en cada componente de la prueba (Numérico – variacional, Geométrico - métrico y aleatorio)
- Seguidamente establecer si existen o no diferencias estadísticamente significativas en el puntaje del pos test inter-grupos de los grupos A (experimental) y B (control) del diseño, para observar si tuvo efecto el tratamiento empleado, se realizó una prueba de Mann-Whitney. A su vez, se estudian los efectos que se hayan obtenido en cada componente de la prueba (Numérico – variacional, Geométrico - métrico y aleatorio)
- Luego el grupo C, se contrasta con el grupo A para de esta manera descartar el efecto de sensibilización de la prueba diagnóstica.
- El grupo D, Se contrasta con el grupo B para descartar los efectos temporales que pueden haber ocurrido en el tiempo que se realizó la intervención.
- También se establece si existen o no diferencias estadísticamente significativas en el puntaje del pos test inter-grupos de los grupos C (experimental) y D (control) del diseño, para observar si tuvo efecto el tratamiento empleado, se realizó una prueba de Mann-Whitney.

Según Kerlinger (2002), *“si el pos test del grupo A es significativamente mayor que el pos test del grupo B, y el del grupo C es significativamente mayor que el del D, entonces es una evidencia de la validez de la hipótesis de investigación”*.

PRUEBA INTRA-GRUPO .Grupo control B

Para comprobar que el grupo control no presenta diferencias estadísticamente significativas se realizó una prueba de signos bilateral ($r = 0.648$). Corroborando que no hubo diferencias entre la aplicación de la prueba diagnóstica y el pos test.

Cuadro N° 14- Estadísticas de Contraste, Grupo Control B, Comparación Pre test-Pos test
Estadístico de contraste (b)

	Pos test grupo con grupo control
Sig.asintot.(bilateral)	.87 (a)

- a. Se ha usado la distribución binomial
- b. Prueba de los signos.

El análisis de los resultados obtenidos por la prueba de signos, indica que los estudiantes del grupo control no avanzaron en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos, respecto a los indicadores de desempeño que evalúa la prueba, se considera que persisten las dificultades con respecto a esta competencia. Según Pifarré (1998), inciden las estrategias cognitivas y metacognitivas que se ejecuten en el modelo para resolver problemas, atendiendo a las estrategias cognitivas aplicadas de entender y analizar el problema; planificar una estrategia para resolver el problema; organizar los datos; resolver el problema y evaluar el resultado, articulándolos con las estrategias de tipo metacognitivo. Tárraga (2008).

Grupo Experimental A

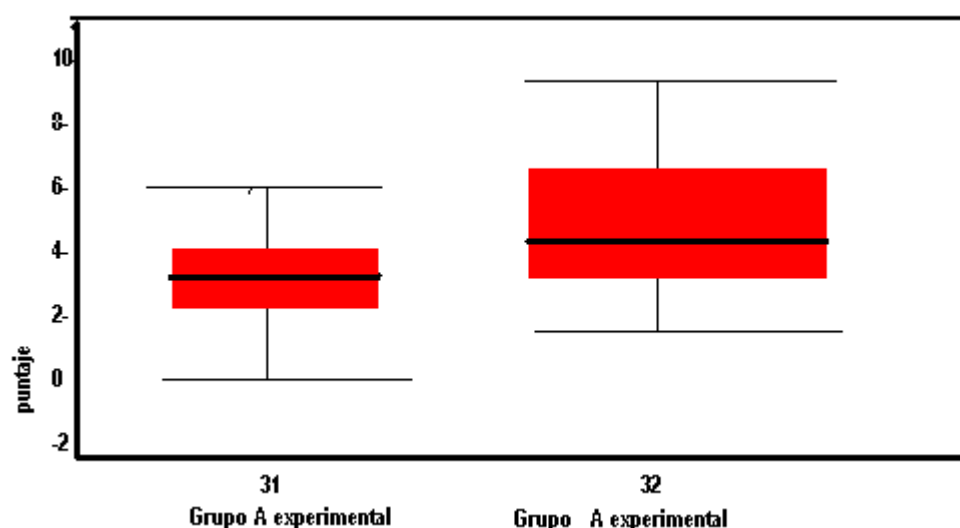
Por otra parte el grupo experimental sí presentó diferencias estadísticamente significativas al 5% de significancia. Se realizó la misma prueba de los signos bilateral ($Z = -2.157$, $r = 0.031$), corroborando que sí hubo diferencias estadísticamente significativas luego de la intervención. Dado que la interacción ha resultado significativa puede decirse que el tratamiento presenta un efecto positivo en cuanto al desarrollo de habilidades para resolver problemas matemáticos.

Cuadro N° 15. Estadísticas de Contraste, Grupo Experimental A, Comparación
Pre test – Pos test
Estadísticos de contraste (a)

	Pos test grupo experi- mental-Pre test grupo experimental
2	-2,67
Sig.asintot.(bilateral)	.031

- a. Prueba de signos

Grafico N° 3. Comparación entre el Pretest y el Postest del Grupo Experimental A



Grupos

De acuerdo a la interpretación del gráfico N° 3 se muestra la diferencia entre el pre test y el pos test del grupo experimental. Se observa el avance con respecto a la pre-prueba, a su vez, se establece que la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados muestra un desarrollo positivo, lo que significa que el grupo de estudiantes sometidos al tratamiento, lograron aplicar las estrategias cognitivas y metacognitivas en la resolución de los problemas planteados.

Teniendo en cuenta que se corrobora la existencia de diferencias significativa con respecto a este grupo, se realiza la prueba de los signos, para cada componente de la prueba para establecer si existen diferencias estadísticamente significativas con respecto a cada uno de ellos.

• Componente numérico – variacional: Se establecen diferencias estadísticamente significativas para este componente, en la prueba de signos ($r = 0.019$), corroborando la hipótesis alternativa específica 1.

Cuadro N° 15. Estadísticas de Contraste Prueba de Signos para el grupo Experimental A, Componente Numérico - Variacional.

Estadísticos de contraste (b)

	Nume-varia Pos tes- Numer-varia Pre test
Sig.exacta (bilateral)	.017 (a)

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de los signos

Estadísticos SPSS 10

De acuerdo a estos datos, los estudiantes presentan fortalezas en los siguientes desempeños: interpretación y comparación de distintas representaciones de un mismo número (como fracción, como decimal o como natural); resolución de problemas en contexto de tipo aditivo y multiplicativo; resolución de problemas en contexto real de proporcionalidad en contextos multiplicativos y representación de relaciones numéricas con ecuaciones e inecuaciones aritméticas sencillas.

• Componente Geométrico – métrico: se establecen diferencias estadísticamente significativas para este componente, en la prueba de signos ($r = 1.015$), se rechaza entonces la hipótesis nula específica N° 2.

Cuadro N° 16. Estadísticas de Contraste Prueba de Signos para el grupo Experimental A, Componente Geométrico – Métrico. Estadísticos SPSS 10
Estadísticos de contraste (b)

	Geom-metrica pos test- geom-metrica pre test
Sig.exacta (bilateral)	1 .015 (a)

- a. Se ha usado la distribución binomial.
b. Prueba de los signos

El p-valor de 1,015, al mostrar que existen diferencias significativas entre el pre y el pos test, significa que no existen dificultades con respecto a la resolución de problemas contextualizados de este componente, evidenciándose en fortalezas en los desempeños siguientes: resolver problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes; diferenciar atributos medibles tales como: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa; y comparar figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes.

• Componente Aleatorio: Se establecen diferencias estadísticamente significativas para este componente, en la prueba de signos ($r = 0.031$), corroborando la hipótesis alternativa específica 3.

Cuadro N° 17. Estadísticas de Contraste Prueba de Signos para el grupo Experimental A, Componente aleatorio. Estadísticos SPSS 10
Estadísticos de contraste (a)

	Aleatorio Pos test-aleatorio Pre test
Z	-2,157
Sig.asintot.(bilateral)	.031

- a. Prueba de los signos

Lo anterior evidencia que el trabajo realizado tuvo incidencia positiva con respecto a este componente, como indicadores de desempeño de los estudiantes se presentan los siguientes: mejor nivel al interpretar datos en tablas, gráficos de barra, pictogramas y de líneas; resolver problemas interpretando datos en forma organizada y aplicando aleatoria; así como para conjeturar y poner a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos y en geometría y métrica.

PRUEBA INTER-GRUPO PARA EL POSTEST.

Grupos experimental A y grupo control B.

Se ha realizado la prueba U de Mann-Whitney, para establecer si existen o no diferencias significativas entre los grupos comparados, esta prueba es paralela a la prueba paramétrica de contraste t de student para muestras independientes, contrasta si dos poblaciones muestreadas son equivalentes en su posición, para evaluar si hubo o no efectos sobre la variable dependiente. Para estos grupos los efectos han resultado estadísticamente significativos ($Z = -2.457$, $r = 0.014$), Como $r < 0.05$ se acepta la hipótesis alternativa que el programa si tuvo incidencia en el desarrollo de la competencia para resolver problemas matemáticos contextualizados.

Cuadro N° 18. Estadísticas de Contraste Grupo A Experimental y Grupo B control, Pos test

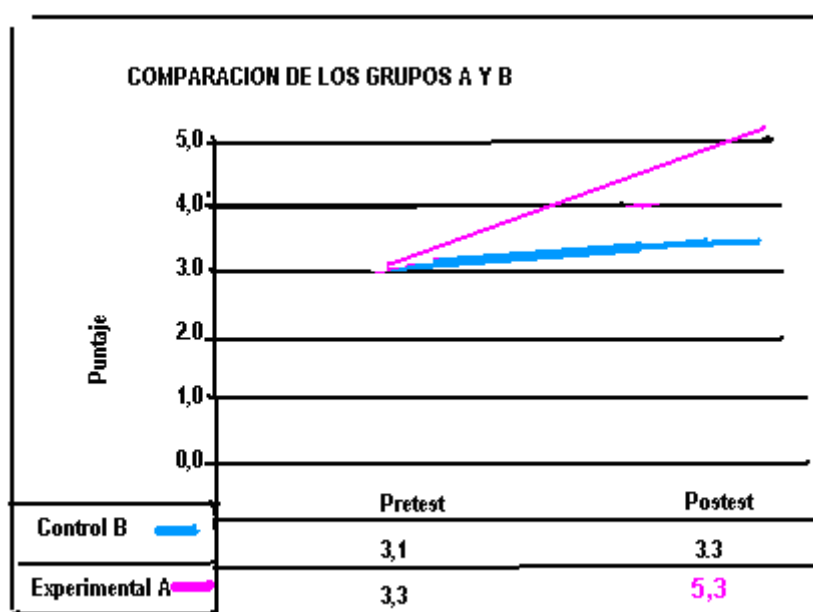
Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Puntaje Grupo A			
Experimental post	33	38,61	1274.00
Grupo B control post	32	27,22	871,00
Total	65		

Estadísticos de contraste (a)

	Puntaje
U de Mann-Whitney	343,000
W de Wilcoxon	871,000
Z	-2,457
Sig.asintot.(bilateral)	.014

a. Variable de agrupación. Grupos
Estadísticos SPSS 10

Gráfico N° 3. Comparación de los Grupos A experimental y B control, puntajes del pre test y pos test



En la gráfica N° 3, puede observarse cómo la posición inicial del grupo experimental es idéntica en términos promedio con la del grupo de comparación. Sin embargo, tras el tratamiento, el grupo experimental mejora enormemente hasta superar al grupo control. Esto constata que el tratamiento basado en estrategias didácticas metacognitivas da resultados positivos en lo que respecta al desarrollo de la competencia resolución de problemas.

Se realiza la prueba U de Mann-Whitney para establecer si existen diferencias significativas con respecto a cada componente de la prueba, los resultados se presentan en el siguiente cuadro.

Cuadro N° 19. Rangos y Estadísticos de Contraste Grupo A Experimental y B Control, por componentes de la prueba
Rangos

Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Nume-varia-pos test			
A experimental	30	37,17	1115,00
B Control	32	26,19	838,00
Total	62		
Geom.-metric pos test			
A experimental	30	35,27	1058,00

B con trol	32	27,97	895,00
Yotal	62		
Aleatorio pos test			
A experimental	30	36,10	1083,00
B control	32	27,19	870,00
Total	62		

Estadísticos de contraste (a)

	Nume-varia Pos test	Geom.-metric Pos test	Aleatorio Pos test
U de Mann-Whitney	310,000	367,000	342,000
W de Wilcoxon	838,000	895,000	870,000
Z	-2,489	-1,693	-2,056
Sig.asintot.(bilateral)	.013	.090	.040

a.Variable de agrupación: grupos
Estadísticos SPSS 10

Como se observa existen diferencias estadísticamente significativas para los ítems pertenecientes a los componentes numérico – variacional ($Z=-2.489$, $r = 0.013$) y Aleatorio ($Z=-2.056$, $r = 0.040$), para una significancia del 5%. Igualmente, se establecen para este valor de significancia, diferencias estadísticamente significativas para los ítems del componente Geométrico – métrico de la prueba ($Z=-2,693$, $r = 0.090$). Estas diferencias permiten corroborar lo anteriormente planteado para el análisis de componentes intra – grupos del grupo experimental A.

Ahora bien, se contrasta el grupo C con el grupo A, para de esta manera descartar el efecto de sensibilización de la prueba diagnóstica. La prueba U de Mann-Whitney no reporta diferencias estadísticamente significativas ($Z=-0.487$, $r = 0.626$) entre los resultados del pos test de los dos grupos experimentales, lo que descarta el efecto de sensibilización del pre test en el Grupo experimental A.

Cuadro N° 20. Rangos y Estadísticos de Contraste Grupos A y C
Rangos

Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Puntaje grupo A			
Experimental post	33	30,94	1021,00
Grupo C			
Experimental post	30	33,17	995,00
Total	63		

Estadístico de contraste (a)

	Puntaje
U de Mann-Whitney	480,000
W de Wilcoxon	1021,000
Z	-,467
Sig.asintot.(bilateral)	,626

a. Variable de agrupación: Grupos
Estadísticos SPSS 10.

A su vez se contrasta El grupo D con el grupo B para descartar los efectos temporales que pueden haber ocurrido en el tiempo que se realizó la intervención. La prueba U de Mann-Whitney no reporta diferencias estadísticamente significativas ($Z=- 0.482$, $r = 0.630$) entre los resultados del posttest de los dos grupos controles, lo que descarta el efecto temporal entre los grupos.

Cuadro N° 33. Rangos y Estadísticos de Contraste Grupos B y D controles
Rangos

Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Puntaje grupo B control post	32	34,66	1109,00
Grupo D control post	34	32,41	1102,00
Total	66		

Estadístico de control (a)

	Puntaje
U de Mann-Whitney	407,000
W de Wilcoxon	1102,000
Z	-.482
Total	-630

a. variable de agrupación: Grupos
Estadísticos SPSS 10.

Por último se realiza la comparación entre los resultados del pos test de los grupos C (experimental) y D (control), la prueba de Mann-Whitney presenta diferencias altamente significativas ($Z=-3.295$, $r = 0.001$) con respecto a la comparación de estos dos grupos, lo que corrobora el cumplimiento de la hipótesis general alternativa de esta investigación, las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo si inciden en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos.

El gráfico N° 4. muestra la comparación entre los diferentes momentos de los cuatro grupos, se evidencia la equivalencia del grupo A (experimental) y el grupo B (control) en el puntaje obtenido en el pre test (primeros dos gráficos de izquierda a derecha), a su vez se puede observar las diferencias en los resultados del pos test de los grupos experimentales con respecto a los grupos controles, los grupos experimentales obtuvieron mayor puntaje en esta prueba corroborando el efecto positivo del programa de intervención.

Gráfico N° 4 Diagrama de Cajas, comparación de los diferentes grupos

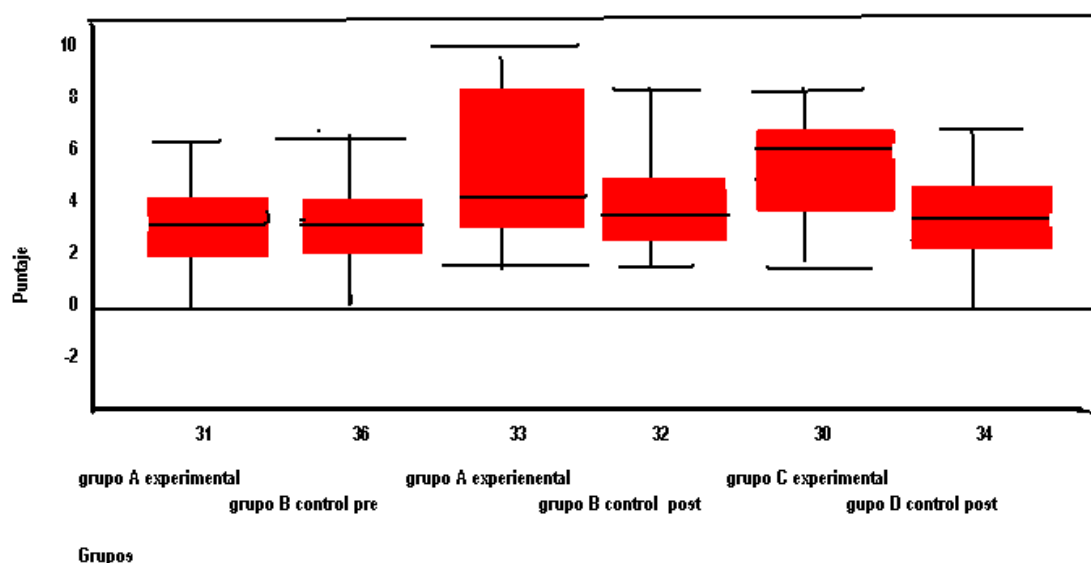


Gráfico de SPSS 10

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados anteriores, se ratifica lo planteado por Ferrer (2000), Bara (2001) y Sulbarán (2007), con respecto a la función que debe desempeñar el docente, preparándose para intervenir en el programa, estructurándose en las diferentes fases que se han de realizar y de esta forma implicándose directamente con la aplicación de las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, de aquí que se sienta motivado a integrar este tipo de estrategias a su planeación y ejecución de clases evaluando su efectividad y de esta forma, realizar cambios consecuentes en su práctica pedagógica.

Por otra parte, este trabajo de investigación confirma lo encontrado por Pifarré y Sanuy (2001), quienes concluyen que el diseño y aplicación de propuestas didácticas que tengan como objetivo mejorar el proceso y las estrategias para resolver problemas de matemática, tienen una incidencia positiva cuando se trabaja en las habilidades cognitivas y metacognitivas de los estudiantes. A su vez, que se tengan en cuenta parámetros tales como: contextualizar el problema planteado, sea desde la matemática o desde la vida cotidiana, dándose entonces un aprendizaje significativo; aplicar métodos de enseñanza en los cuales se haga explícito el o los modelos de resolución de problemas que se aplican, con el fin de que no quede de manera implícita, sino que se explicita el proceso cognitivo y metacognitivo que se desarrolla en el tiempo que se le dedica a resolver el problema; diseñar diferentes tipos de materiales didácticos y construcciones de ambientes de aprendizaje que permitan que el estudiante seleccione, organice y controle diferentes procedimientos a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos contextualizados.

Para Ferrer (2000) la habilidad para resolver problemas matemáticos se refiere a la construcción y dominio, por el estudiante, de los modos de actuar y métodos de solución de problemas utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos que la matemática brinda, en calidad de instrumentos, conjuntamente con las estrategias de trabajo heurístico para la sistematización de esos instrumentos en una o varias veces de solución, permitiendo de esta manera la transferencia de conocimiento. A pesar de que el autor nos indica que es una habilidad, de acuerdo a lo planteado en esta investigación el término "habilidad" es coherente con la definición de competencia expresada, es decir, la definición de Ferrer apunta a que el discente utilice el saber en un atendiendo a sus modos de actuar (ser), componentes de la competencia resolución de problemas definida en esta investigación.

Entonces, se establece que la resolución de problemas matemáticos, en sus funciones de medio y fin del aprendizaje, constituye una actividad compleja e integral que requiere de la formación de modos de actuación, métodos de solución y

procedimientos específicos, elementos constitutivos de la competencia, que incluyen a su vez elementos tanto cognitivos como metacognitivos.

El análisis de los resultados lleva a plantear las siguientes conclusiones, que hacen referencia a los objetivos planteados en esta investigación.

El objetivo general pretendía comprobar la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 6º de la institución educativa de Copiapó. La conclusión que se extrae de este objetivo es la siguiente:

El programa de intervención con estrategias didácticas con enfoque metacognitivo produjo una mejora en la resolución de problemas matemáticos contextualizados.

La valoración de diferencias estadísticas significativas, de los grupos experimentales, intra-grupo e inter-grupos indica que el programa basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo produjo efectos positivos en la variable competencia de resolución de problemas. Estos efectos se produjeron en el sentido esperado: En el pre test el grupo control B y el experimental A, no obtuvieron diferencias significativas, en el pos test el grupo experimental A obtuvo una importante mejora superando al grupo control. A su vez, la comparación del pos test entre el grupo experimental C y el control D, muestra que el grupo experimental supera significativamente al grupo control, corroborándose que el programa de intervención sí da resultado.

Se comprueba entonces lo planteado por Schoenfeld (1985) *el manejo de Estrategias metacognitivas caracterizada por la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo, hace parte fundamental en el proceso de resolución de problemas*; es decir, no basta con tener los conocimientos declarativos claros y estrategias cognoscitivas acordes para realizar el proceso de resolución de problemas, sino que es inminentemente necesario poner en práctica la planeación, el monitoreo y la comprobación de resultados con el fin de resolver diferentes problemas contextualizados dentro del área de matemática o fuera de ella; el programa de intervención realizado en esta investigación aporta en gran medida a este tipo de estrategias, dando resultados favorables en el desarrollo de la competencia resolución de problemas en matemática dentro de un contexto de la vida cotidiana.

A su vez, se comprueba que en la resolución de problemas se distinguen cuatro fases: *análisis, exploración, ejecución y comprobación, que son indispensables en la resolución de problemas*. Schoenfeld (1985), estas están acordes con las estrategias cognitivas desarrolladas en el programa de intervención (Entender y analizar el problema; Planificar una estrategia para resolver el problema; Organizar los datos y el plan de resolución en un organizador de información; Resolver el problema); cuando se entiende y analiza el problema se está en la fase de análisis; al planificar, organizar los datos se refiere entonces a la fase de exploración y cuando se aplican las diferentes estrategias planeadas utilizando las operaciones pertinentes se está en la fase de ejecución; sin embargo la etapa de comprobación, ya se refiere a las estrategias metacognitivas que se ponen en juego a lo largo del proceso de aplicación de las estrategias cognitivas, es aquí donde se evidencia que la auto-instrucción, el auto-monitoreo y la comprobación durante todas las etapas de la resolución de problemas permiten que se movilicen diferentes estrategias de tipo metacognitivo que coadyuvan en el desarrollo de la competencia resolución de problemas; caracterizada por desarrollar y aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas (ICFES, 2007).

El conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas, a través de la aplicación de modelos, permite que el estudiante desarrolle esta competencia. (Polya, 1981; Mayer, 2002; Schoenfeld, 1985; Mason et al, 1989; De Guzmán, 1991; Pifarre et al, 1998; Tárraga, 2008). Lo cual, se comprueba cuando se aplica el modelo de resolución de problemas utilizando diferentes estrategias didácticas que apunten al desarrollo de esta competencia; es así como las cinco estrategias cognitivas que se utilizaron en la aplicación del programa de intervención tales como: Entender y analizar el problema; Planificar una estrategia para resolver el problema; Organizar los datos y el plan de resolución en un organizador de información; Resolver el problema; Evaluar el resultado del problema, aportaron al desarrollo de la competencia solución de problemas matemáticos dentro de contextos de la vida cotidiana. Cada una de las diferentes estrategias cognitivas, como lo plantea Flavell (1984) se refiere a las acciones cognitivas (atención, ensayo, elaboración,

recuperación) que en el sujeto actúan para la consecución efectiva del objetivo propuesto. Una estrategia cognitiva es aquella designada simplemente a llevar al individuo a conseguir algún objetivo o sub-objetivo cognitivo; por tanto, cada paso, cada una de las estrategias cognitivas propuestas aporta a la consecución efectiva de la resolución de un problema en matemática, y fuera de ellas, dando cabida a la transposición del conocimiento de las diferentes estrategias cognitivas, para resolver problemas fuera del contexto matemático.

Por otra parte, se puede concluir también que: *La contextualización de los problemas aporta elementos significativos para el desarrollo de la competencia resolución de problemas*, cabe resaltar la utilización de diferentes ambientes de aprendizajes creados desde los contextos que son significativos para los estudiantes. *El desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva* (Freudhental, 1991), por tanto se utilizaron contextos y situaciones que generaron la necesidad de ser organizados matemáticamente por los estudiantes. Estos contextos fueron estructurados de tal forma que los estudiantes debieron utilizar herramientas matemáticas en la vida cotidiana.

La matematización. concepto que utiliza Freudhental para referirse a la contextualización de la matemática, es decir vincular la realidad con los conocimientos tanto declarativos como procedimentales que la matemática utiliza, fue un aspecto fundamental para lograr que los estudiantes tuvieran un aprendizaje significativo, a su vez que le encontraban sentido a los conceptos aprendidos en clases, se establece entonces que la contextualización de los problemas propuestos con diferentes ambientes de aprendizaje creados, aportaron en el establecimiento de diferencias significativas entre los diferentes grupos en los cuales se realizó la intervención.

Se establece con este resultado un avance a nivel investigativo en el campo de la metacognición, teniendo en cuenta que la tendencia habitual de las investigaciones encaminadas a mejorar la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de básica primaria es escasa. El presente estudio muestra que con la intervención basada en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo para desarrollar habilidades de resolución de problemas matemáticos se obtienen resultados positivos con estudiantes dicho nivel.

Otra de las conclusiones que se establece respecto al objetivo anterior, es que *la preparación y aplicación en estrategias didácticas en pro del desarrollo de competencias metacognitivas en el aula, aporta al aprendizaje autónomo de los estudiantes*. Según Monereo et al (1999), un objetivo fundamental en la utilización de este tipo de estrategias es el de aumentar la conciencia del alumno sobre las operaciones y decisiones mentales que realiza cuando aprende un contenido o resuelve una tarea, a su vez que controla los pasos que va realizando en el desarrollo de la tarea.

En la intervención llevada a cabo en esta investigación se pone en práctica lo anteriormente planteado, cuando se establece que cada vez que se realizan las cinco estrategias cognitivas planteadas (Entender y analizar el problema; Planificar una estrategia para resolver el problema; Organizar los datos y el plan de resolución en un organizador de información; Resolver el problema; Evaluar el resultado del problema), de manera simultánea a cada una de ellas se realizan las estrategias metacognitivas (auto instrucción, auto monitoreo y comprobación), las cuales coadyuvan no solo a desarrollar la competencias de resolver problemas, sino a potenciar la capacidad para aprender a aprender y favorece la transferencia de los aprendizajes a la cotidianeidad.

Cada una de las fases inspirada en la filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje (Mateos, 2001), concibe al docente en el rol de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del estudiante, llevándolo poco a poco a participar de un nivel creciente de competencia y, al mismo tiempo, retirando paulatinamente el apoyo que proporciona hasta dejar el control del proceso en manos del estudiante. Por tanto, la aplicación de la propuesta mediante las fases de Instrucción directa, modelado metacognitivo, práctica guiada y aprendizaje cooperativo o práctica cooperativa, influyó de manera positiva en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados de los estudiantes.

A su vez, en el planteamiento de las hipótesis específicas de la presente investigación, se había establecido que Las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo influyen en la resolución de problemas matemáticos pertenecientes al

componente numérico – variacional, al geométrico – métrico y al aleatorio. La conclusión que se extrae de estas hipótesis es la siguiente:

El programa de intervención produjo una mejora en la resolución de problemas matemáticos pertenecientes a los componentes numérico – variacional y al aleatorio. Sin embargo, el componente geométrico – métrico, no presentó diferencias estadísticas significativas con respecto a las pruebas aplicadas.

La valoración de diferencias estadísticamente significativas intra - grupos, del grupo experimental A, en los componentes numérico – variacional y aleatorio, indica que el programa de intervención produjo efectos positivos en la variable competencia para resolver problemas pertenecientes a estos componentes. Estos efectos se produjeron: En el cambio de puntuación del pre test con respecto al pos test del grupo experimental de cada componente ($r = 0.019$) y ($r = 0.031$) respectivamente.

Por otra parte, se establecen diferencias estadísticamente significativa inter – grupos, del grupo experimental A y el grupo control B, nuevamente en los componentes numérico –variacional y aleatorio, indicando que las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo producen efectos positivos en la variable competencia para resolver problemas pertenecientes a estos componentes. Estos efectos se produjeron en el sentido esperado: En la evaluación del pos test la comparación entre el puntaje obtenido por el grupo experimental y el control, presentó diferencias estadísticas significativas numérico–variacional ($Z=-2.489$, $r = 0.013$) y Aleatorio ($Z=-2.056$, $r = 0.040$).

Corroborándose que el programa de intervención si da resultado en cuanto a estos componentes de la prueba. Estas diferencias indican con respecto al componente numérico-variacional los estudiantes interpretan y comparan distintas representaciones de un mismo número, representan relaciones numéricas con ecuaciones e inecuaciones aritméticas sencillas, resuelven problemas contextualizados de tipos aditivos y multiplicativos, resuelven problemas en contexto real de proporcionalidad en contextos multiplicativos. A su vez, con respecto al componente aleatorio los estudiantes interpretan datos en tablas, graficas de barras y de líneas, conjeturan y ponen a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos y resuelven situaciones problemas interpretando datos en forma organizada y aplicando la aleatoria.

Sin embargo, para el componente geométrico–métrico no se establecieron diferencias estadísticamente significativas con respecto a las pruebas intra–grupos e inter grupos, realizadas al grupo experimental A y al control B. Al parecer debió haberse dedicado más tiempo al estudio de la resolución de problemas matemáticos pertenecientes a este componente. Aunque se establecieron ambientes de aprendizaje que abarcaran el estudio de todos los componentes esto no fue suficiente. Indicando entonces que los estudiantes presentan aún dificultades para comparar figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes y propiedades, diferenciar atributos medibles tales como: longitud, superficie, volumen, capacidad y masa, y resolver problemas en contexto utilizando diferentes procedimientos y estrategias para calcular áreas y volúmenes. Se debe profundizar más en esto aspectos desde lo declarativo y lo procedimental.

6.1. Conclusiones Finales

Las conclusiones que se pueden determinar, teniendo en cuenta el análisis anterior son:

- _ Los maestros de básica primaria son capaces de cambiar los paradigmas tradicionales de enseñanza, poniendo a prueba otros métodos de intervención innovadores, si se les brinda la formación adecuada.
- _ La preparación de los docentes en la aplicación en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, contribuye al desarrollo de competencias metacognitivas en el aula, aportado al aprendizaje autónomo de los estudiantes.
- _ La resolución de problemas matemáticos, en sus funciones de medio y fin del aprendizaje, constituye una actividad compleja e integral que requiere de la formación de modos de actuación, métodos de solución y procedimientos específicos, elementos constitutivos de la competencia, que incluyen a su vez conocimientos tanto cognitivos como metacognitivos.
- _ El manejo de estrategias metacognitivas caracterizada por la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo, hace parte fundamental en el proceso de resolución de problemas.

_ El conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas, a través de la aplicación de modelos que articulen estrategias cognitivas y metacognitivas y el contexto, permite que el estudiante desarrolle la competencia de resolver problemas desde el uso de las matemáticas en sus realidades.

_ Los aportes de Freudenthal sobre la contextualización de los problemas aporta elementos significativos para el desarrollo de la competencia resolución de problemas; a su vez se corrobora que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen *Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos...* un papel relevante y ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

_ La aplicación sistemática de un modelo didáctico, inspirado en la filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje, operacionalizado mediante las fases de instrucción directa, modelado metacognitivo, práctica guiada y aprendizaje cooperativo, influye de manera positiva en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados de los estudiantes.

_ Los resultados obtenidos en los grupos experimentales demuestran la eficacia del programa de intervención basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, el cual produjo una mejora en la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados.

_ Se establece un avance a nivel investigativo en el campo de la metacognición, teniendo en cuenta que la tendencia habitual de las investigaciones encaminadas a mejorar la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de básica primaria es escasa.

_ El programa de intervención produjo una mejora en la resolución de problemas matemáticos pertenecientes a los componentes numérico – variacional y al aleatorio. Sin embargo, el componente geométrico – métrico, no presentó diferencias estadísticas significativas con respecto a las pruebas aplicadas.

_ El estudio y puesta en práctica de elementos constitutivos al pensamiento geométrico y métrico debe profundizarse en la enseñanza primaria, ahondando en lo epistémico y articulándolos con los otros pensamientos, en pro de obtener un aprendizaje integral, con respecto a la matemática escolar.

6.2.. RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS

Los resultados y conclusiones de la presente investigación abren nuevas vías de investigación que plantean cuestiones e inquietudes en el área. Estas nuevas vías de investigación se resumen en las siguientes sugerencias:

Si bien es cierto que la intervención dio resultados positivos en cuanto a la habilidad de resolver problemas matemáticos, es posible investigar sobre los efectos que tiene la puesta en marcha de este programa basado en las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en las otras disciplinas del currículo de la básica primaria, si se da la transferencia de este conocimiento a las otras áreas, buscando la interdisciplinariedad. Es posible que se creen ambientes de aprendizajes que integren las otras disciplinas y de esta forma mejorar la mediación docente.

Por otra parte, se recomienda que en investigaciones posteriores se mire el efecto de temporalidad de la intervención, es decir, estudiar si las estrategias metacognitivas utilizadas en el programa se mantienen a través del paso del tiempo, o se olvidan si los docentes vuelven a realizar la enseñanza de forma tradicional.

Sin embargo, se reconoce el efecto de la intervención en el desarrollo de la habilidad para resolver problemas matemáticos en todos los componentes o pensamientos que esta disciplina maneja.

También se sugiere que este tipo de investigaciones sean realizadas con un mayor grupo de instituciones en el Municipio de Copiapó u otros, teniendo en cuenta las falencias que presenta cada uno de ellos en cuanto a los puntajes de las pruebas nacionales e internacionales, con lo que respecta a la habilidad para resolver problemas en el área de matemática. Finalmente, se plantea como sugerencia para futuras investigaciones la comparación de diferentes variaciones de este mismo entrenamiento, es decir poner en práctica otras estrategias didácticas con este mismo enfoque, que les permita a los estudiantes ir reforzando el aprendizaje autónomo, y el desarrollo de habilidades de tipo metacognitivo, las cuales contribuyan a su formación como aprendices reflexivos y conscientes de sus potencialidades, pero también de sus deficiencias.

TERCERA PARTE

RESOLUCION DE PROBLEMAS MATE MATICOS DEL ESTUDIANADO DE ENSEÑANZA BASICA UTILIZANDO TECNOLOGIAS DE INFORMACION

INDICE	Pág.
1. Introducción	120
2. Objetivos.....	120
3. El estado de la cuestión.....	120
3.1. Habilidades de autorregulación	121
3.2. Creencias	122
3.2.1. Importancia del ámbito emocional en el proceso de enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas...	122
3.3. El aprendizaje constructivo, un vehículo para hacer matemática.....	123
3.4. La importancia de contextos auténticos y significativos.....	124
3.5. Aprendizaje a través del trabajo colaborativo y / o cooperativo.....	125
3.6. El uso del computador en la enseñanza de la matemática.....	125
4- El proyecto.....	127
4.1 En qué consiste.....	127
4.2 Metodología.....	127
4.3 Hipótesis.....	128
4.4 Variables.....	128
4.5 Diseño.....	128
4.6 Muestra.....	130
4.7 Instrumentos de Medición.....	130
4.7.1 . Descripción de la Escala Fennema-Sherman de actitudes hacia la matemática.....	130
4.7.2 Test de rendimiento.....	130
5. Análisis de datos.....	131
6. Conclusiones.....	138
6.1 Logros.....	139
7. Bibliografía.....	140

1. INTRODUCCIÓN

En esta parte de la investigación, se hace hincapié en el uso de las TIC, en base a un modelo de multimedia y se analiza el efecto que esta tecnología tiene en la actitud hacia las matemáticas y el rendimiento académico de los alumnos de sexto año básico de un establecimiento educacional municipalizado.

La situación actual en la que nos encontramos inmersos, la sociedad del conocimiento, plantea nuevos retos en el sistema educativo en general y en particular en el de las matemáticas de la educación obligatoria, que implican nuevos métodos de trabajo y de enseñanza, de manera que se facilite por una parte una formación integral del estudiante que le capacite para desenvolverse de forma adecuada en la sociedad de la información y por otra, desarrollar las competencias necesarias y determinadas por el currículo de matemáticas correspondiente. El impacto de las TIC es de tal magnitud que hasta ha replanteado, según muchos autores, el concepto de “formación general” e incluso el de “personas alfabetizadas”.

Por otra parte, la Educación Matemática plantea nuevas necesidades para este siglo; poniendo el acento en el desarrollo de ciertas competencias por parte de los alumnos.

“La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran”

“El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en el que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, mas que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso” (Proyecto PISA 2003).,

2. OBJETIVOS

Determinar la relación entre la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas que presentan los estudiantes de sexto año básico a partir del uso de las TIC en un modelo interactivo con multimedia y trabajo colaborativo con sus pares.

Determinar la relación que existe entre el rendimiento académico en matemáticas que experimenta el estudiante a partir del uso de las TIC en base a un modelo interactivo con multimedia y trabajo colaborativo con sus pares.

3. EL ESTADO DE LA CUESTIÓN

En este nuevo escenario educativo que ha aparecido en la llamada Sociedad de la Información con la llegada de las TIC, se genera una forma de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos colaborativos en el proceso educativo utilizando estas herramientas, que enriquecen el proceso formativo individual a través de una construcción social del conocimiento.

Con el objetivo básico de potenciar este tipo de aprendizaje matemático en alumnos de educación básica y de construir un modelo que permita analizar los beneficios producidos, se ha diseñado, aplicando y estudiando un entorno interactivo de aprendizaje, soportado por medios informáticos y por TIC, en el que el trabajo se organiza de modo colaborativo y las formas de interacción, comunicación y aprendizaje son diferentes respecto al modelo tradicional.

Considerando que no en todas las escuelas municipales, especialmente de tipo rural, se cuenta con equipos para facilitar el aprendizaje de las TIC, se hizo una selección de los establecimientos educacionales urbanos en que se disponía de equipos de computación para que los estudiantes pudieran realizar las prácticas que este modelo incorpora. Los estudiantes que formaron parte de este estudio, fueron estudiantes de sexto año básico de una escuela perteneciente al sistema de municipalización de la comuna de Copiapó. Este mismo grupo de

estudiantes a su vez, fueron a quienes se les instruyó en estrategias cognitivas y metacognitivas para resolver problemas de matemáticas.

El entorno de aprendizaje construido e implementado consiste en un modelo formado básicamente por un entorno interactivo, unas actividades con una estructura determinada y una forma de organización del trabajo de manera colaborativa.

Para la investigación –acción, se han diseñado y aplicado los instrumentos de análisis correspondientes para estudiar, por un lado, las actividades propuestas a lo largo del proceso de aprendizaje teniendo en cuenta que los alumnos fueron sometidos a una experiencia que les permitió conocer las estrategias para resolver problemas en general y luego las estrategias metacognitivas que igualmente les permitió conocer manejar el proceso de resolución de problemas y por otra parte, se pretende conocer la evolución de los aprendizajes de los mismos alumnos en relación a las competencias matemáticas adquiridas con el empleo de las TIC, considerando esta vez, aspectos como la motivación hacia las matemáticas y el rendimiento que se logra con el uso de las TIC. El grupo de control empleado para contrastarlo con el grupo experimental indicado, no fue sometido a pruebas de estrategias para resolver problemas en general ni para la instrucción de estrategias metacognitivas y los estudiantes, igualmente, pertenecían al mismo establecimiento educacional, considerando que es un establecimiento con estudiantes altamente vulnerables, de bajo interés por el estudio en general y con serios conflictos de convivencia escolar normal.

En cuanto al estudio de las actividades propuestas, nos interesa en particular determinar las condiciones estructurales mínimas en función de las diferentes etapas del proceso; teniendo en cuenta que en cada fase las modalidades comunicativas, los conocimientos tecnológicos de los alumnos son diferentes. Cabe mencionar que en esta parte de la investigación se retoman los antecedentes de investigación relacionados con la temática señalados en la primera y segunda parte y se agregan los aspectos relevantes con la misma en cuanto a actitudes hacia las matemáticas (aspecto no considerado en los estudios anteriores) relacionando esto con el rendimiento en la resolución de problema luego de trabajar con las TIC.

Esta parte de la investigación centra su interés en tres cuestiones básicas relacionadas con la educación básica actual, en particular con la educación matemática: la incorporación de las TIC, la importancia de los procesos de comunicación y trabajo en equipo por parte de los estudiantes (trabajo colaborativo) y el aprendizaje en la resolución de problemas luego de conocer las estrategias generales para resolver problemas de matemáticas que aquí se aplican (parte I de la investigación) y las estrategias metacognitivas para resolver problemas de matemáticas (parte II de la investigación). En el modelo diseñado y estudiado, estos tres aspectos no se presentan aisladamente sino que han sido tenidos en cuenta de manera integrada e interrelacionada tanto para el diseño del entorno de aprendizaje como para el estudio del mismo.

Los profesores que participaron en esta investigación son profesionales que incluyen las TIC como parte de los recursos didácticos utilizados en su trabajo diario y que emplean una metodología que facilita el trabajo colaborativo entre los alumnos, de modo de fomentar el trabajo en equipo, incentivar la calidad y crecimiento personal y preparar al alumnado para los nuevos desafíos que se le van a presentar en la vida real a lo largo de su futuro personal y profesional. La metodología entonces, facilita que la adquisición del conocimiento y el desarrollo de competencias sea la meta del currículo. El objetivo de estos profesores no se basa en exponer sus conocimientos, sino que el alumno informe de sus conocimientos previo a la información entregada por el profesor, pero replanteada por el alumno y expresada en su propio vocabulario, en que se presentan conjeturas propias, en que comparte sus descubrimientos con sus pares, en que se muestre desarrollo de una actividad interna dado un proceso de reflexión personal y grupal.

3.1. Habilidades de autorregulación

Estas habilidades se refieren a la naturaleza metacognitiva de un aprendizaje efectivo, especialmente referido a la administración y control de las actividades, por parte del alumno, para la solución efectiva de los problemas matemáticos, es decir, que se conviertan paulatinamente en agentes de su propio aprendizaje.

Hay evidencias abundantes que han demostrado que la autorregulación cognoscitiva constituye un aspecto importante en el desempeño del alumno para hacer matemática. (Shoenfeld, 1985; Perkins, 1995; Vanderbilt, 1997; De Corte 2000). Esto implica, que no es suficiente para el alumno, adquirir ciertos conceptos y habilidades (por ejemplo el cálculo en matemáticas), sino que deben disponer también, de la capacidad para captar la situación como relevante y útil, a fin de resolver las tareas donde aplique estas capacidades, además de sentirse inclinados a llevarlas a cabo siempre que sea apropiado.

Pero, dado que los estudiantes no se convierten automática y espontáneamente en aprendices autorregulados, este proceso es un aprendizaje a largo plazo.

3.2. Creencias

se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera cómo se aproxima una persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo y el esfuerzo que le dedica, entre otras. Es importante notar que no es consciente, sino que a menudo es implícita.

En la Investigación del grupo de cognición y de tecnología en Vanderbilt, 1997, manifiestan:

"(...) Los estudiantes poseen a menudo ciertos conocimiento y habilidades, pero no pueden tener acceso, ni utilizarlos cuando es necesario para solucionar un problema dado. Adquirir una disposición matemática le ayuda a superar esto y a cambiar el fenómeno del conocimiento inerte".

Las matemáticas ya no están concebidas como una colección de conceptos abstractos y de habilidades procesales que se dominarán, sino que *"la última meta de aprender del estudiante, es la adquisición de una disposición matemática, más bien, que de un sistema aislado de conceptos y habilidades"* (Erik De Corte, 2002).

3.2.1. Importancia del ámbito emocional en el proceso de enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas

La formación en el ámbito emocional y afectivo, se fundamenta en la importancia que tienen nuestros pensamientos y creencias en la explicación del modo en que nos comportarnos ante las actividades matemáticas. Estos ámbitos explican los rechazos y las atracciones hacia las mismas, hacia el profesorado que la enseña, hacia la situación de aprendizaje en la que se desarrolla, y, en general, hacia la escuela, hacia los demás o hacia ellos mismos.

Las actitudes que los estudiantes van generando como producto de su experiencia escolar hacia las matemáticas se van estabilizando y haciéndose resistentes a los cambios, conforme avanzan en niveles educativos.

Al revisar la literatura se encuentran investigaciones que confirman la relación de la dimensión afectiva del individuo (creencias, actitudes y emociones) y la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (Gairín²⁹, 1990; Miranda, Fortes y Gil³⁰, 1998; Schoenfeld, 1992³¹; Gómez-Chacón³², 1997, 1999, 2000 y Guerrero y Blanco³³, 2002).

En relación a las actitudes Gómez-Chacón³⁴ (1997) las caracterizan:

"Las actitudes constan de tres componentes: cognitivo, que se manifiesta en las creencias subyacentes a dicha actitud, afectivo que se expresa en sentimientos de aceptación o de rechazo de la tarea o de la materia, y, por último, un componente intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento. En definitiva, las actitudes se concretan y se expresan en ideas y creencias, en sentimientos hacia objetos y personas y modos de actuar específico".

Es necesario hacer distinción entre actitudes matemáticas y actitudes hacia la matemática. Se entenderá por actitudes matemáticas, aquellas que tienen un marcado componente cognitivo y se refieren al modo de utilizar las

capacidades generales que son importantes en el trabajo matemático. En cambio, actitudes hacia la matemática aluden a la valoración, aprecio e interés por la materia y por su aprendizaje, predominando el componente afectivo. Rechazo, negación, frustración, pesimismo y evitación son algunas de las manifestaciones actitudinales y comportamentales de muchos alumnos cuando afrontan la tarea matemática.

3.3. El aprendizaje constructivo, un vehículo para hacer matemática

Para que el aprendizaje en matemática llegue a ser eficiente, se requiere que sea el propio alumno quien construya su aprendizaje y lo relacione a su labor diaria, por ende, debe utilizar todo el cúmulo de experiencias que tiene en su interior y llegar a relacionarlas con los nuevos conocimientos, así su aprendizaje será más significativo y llegará a tener sentido, perdurando en sus estructuras mentales, pues lo construye en base a sus necesidades, experiencias e intereses.

Esta idea es avalada por Martiniano Román Pérez y Eloísa Díez López, en su publicación *El currículum como proceso cognitivo y afectivo*:

"El aprendiz aprende con sus capacidades (procesos cognitivos) y sus valores (procesos afectivos) y el profesor, como mediador del aprendizaje, debe identificarlos para tratar de desarrollarlos por medio de contenidos (formas de saber) y métodos / procedimientos (formas de hacer)".

Generalmente en las aulas de clase son escasos los momentos en que tienen actividades alternativas de construcción; es el maestro quien por lo regular proporciona a los alumnos el conocimiento. Es importante que el profesor cambie su rol protagonista por uno que propicie la participación, reflexión, análisis y construcción del conocimiento en los alumnos; y reemplace sus esquemas de acuerdo a las necesidades que se requieran en el momento de la experiencia educativa.

Este planteamiento se apoya en las ideas de Kilpatrick, que señala:

"El conocimiento es activamente construido por el sujeto cognoscente, no pasivamente recibido del entorno. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo a nivel de experiencias de uno; no se descubre un independiente y preexistente mundo fuera de la mente del conocedor."

Por otro lado, Pedro Gómez³⁷ expone en las siguientes ideas que parecen ser comunes a los constructivistas y proporciona algunas de las características de esta posición:

- *"Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.*
- *Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.*
- *Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.*
- *Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico."*

La opción básica que asume la concepción constructivista es la enseñanza guiada y adaptada que propone hacer frente a la diversidad mediante la utilización de métodos de enseñanza diferentes en función de las características individuales de los alumnos. Propone métodos de enseñanza diferenciados para la totalidad del alumnado dentro del currículum común.

En este recorrido el alumno realiza un proceso activo, que tiende a favorecer la adquisición del tipo de razonamiento científico que le interesaba de manera muy especial a Piaget, y que contrasta con la visión pasiva tradicional de otros modelos de aprendizaje. El alumno aprende manipulando objetos e información y estableciendo inferencias. En este proceso actúa como un científico, estableciendo hipótesis y tesis.

3.4. La importancia de contextos auténticos y significativos

La distinción entre aprendizaje significativo y aprendizaje repetitivo, afecta al vínculo entre el nuevo material de aprendizaje y los conocimientos previos del alumno: si el nuevo material de aprendizaje se relaciona de manera sustantiva y no aleatoria con lo que el alumno ya sabe, es decir, si es asimilado a su estructura cognitiva, nos encontramos en presencia de un aprendizaje significativo; si, por el contrario, el alumno se limita a memorizarlo sin establecer relaciones con sus conocimientos previos, nos encontraremos en presencia de un aprendizaje repetitivo, memorístico o mecánico. Ausubel plantea:

"(...) el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización".

En el proceso de orientación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno; no sólo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino cuáles son los conceptos y proposiciones que maneja así como de su grado de estabilidad. Los principios de aprendizaje propuestos por Ausubel, ofrecen el marco para el diseño de herramientas metacognitivas que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando, lo cual permitirá una mejor orientación de la labor educativa, ésta ya no se verá como una labor que deba desarrollarse con "mentes en blanco" o que el aprendizaje de los alumnos comience de "cero", pues no es así, sino que, los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

García⁴¹ (2000) complementa la idea anterior, expresando:

"(...) el aprendizaje significativo, se distingue porque su contenido puede relacionarse de un modo sustantivo con los conocimientos previos del alumno y además se adopta una actitud favorable para la tarea, dotando de significado propio los contenidos que asimila".

El aprendizaje por descubrimiento involucra que el alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognitiva y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el aprendizaje deseado. Si la condición para que un aprendizaje sea potencialmente significativo es que la nueva información interactúe con la estructura cognitiva previa y que exista una disposición para ello del que aprende, esto implica que el aprendizaje por descubrimiento no necesariamente es significativo y que el aprendizaje por recepción sea obligatoriamente mecánico. Tanto uno como el otro pueden ser significativo o mecánico, dependiendo de la manera como la nueva información es almacenada en la estructura cognitiva. La repercusión del aprendizaje escolar sobre el crecimiento personal del alumno, es más grande cuanto más significativo es, cuanto más significados permite construir. Así pues, lo realmente importante es que el aprendizaje escolar de conceptos, de procesos, de valores, sea significativo.

Según Novak, para que el aprendizaje sea significativo deben cumplirse dos condiciones:

"En primer lugar, el contenido ha de ser potencialmente significativo, tanto desde el punto de vista de su estructura interna (significatividad lógica: no ha de ser arbitrario ni confuso), como desde el punto de vista de su asimilación (significatividad psicológica: ha de haber en la estructura psicológica del alumno, elementos pertinentes y relacionables). El alumno ha de estar motivado por relacionar lo que aprende con lo que sabe. Las dos condiciones otorgarán al aprendizaje su carácter de funcionalidad, imprescindible también para su significatividad., es decir, los conocimientos adquiridos –conceptos destrezas, valores, normas, etc.- deben ser funcionales, puedan ser efectivamente utilizados cuando las circunstancias en que se encuentra el alumno lo exijan, ha de ser una preocupación constante de la educación escolar, Cuanto más numerosas y complejas sean las relaciones establecidas entre el nuevo contenido de aprendizaje y los elementos de la estructura cognitiva, cuanto más profunda sea su asimilación, en una palabra, cuanto más grande sea su grado de significatividad del aprendizaje realizado, más grande será también su funcionalidad, ya que podrá relacionarse con un abanico más amplio de nuevas situaciones y de nuevos contenidos".

Resumiendo, el proceso mediante el que se produce el aprendizaje significativo necesita una actividad intensa por parte del alumno, que ha de establecer relaciones entre el nuevo contenido y los elementos ya disponibles en su estructura cognitiva. Esta actividad es de naturaleza fundamentalmente interna y no ha de identificarse con la simple manipulación o exploración de objetos o situaciones.

3.5. Aprendizaje a través del trabajo colaborativo y / o cooperativo

Los alumnos en una situación de enseñanza aprendizaje, parten de sus marcos personales de referencia, que les permiten una primera aproximación a la actividad que enfrentan. Pero es a través de la acción conjunta y los intercambios comunicativos, en un proceso de negociación, que se construyen los marcos de referencia interpersonales que conducirán a lograr un significado compartido de la actividad. Será entre la acción conjunta y los intercambios comunicativos que se ubicarán los marcos materiales de referencia, que son los objetivos de estudio de la actividad educativa. Es decir, los alumnos construyen significados o propósitos de ciertos contenidos culturales, y los construyen sobre todo gracias a la interacción que establecen con el docente y con sus compañeros. En este sentido la enseñanza puede ser definida (Coll y Solé, 43 1990) como:

"Un proceso de negociación de significados, de establecimiento de contextos mentales compartidos, fruto y plataforma a la vez de este proceso de negociación"(p.332). Al realizar actividades académicas cooperativas los individuos establecen metas que son benéficas para sí mismos y para los demás miembros del grupo, buscando así maximizar tanto su aprendizaje como el de los otros.

Coll y Solé (1990) hablan de interacción educativa:

"(...) situaciones en donde los protagonistas actúan simultáneamente y recíprocamente en un contexto determinado, en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje con el único fin de lograr objetivos claramente determinados".

Para Díaz y Hernández (1998), *cooperar es trabajar juntos para lograr metas compartidas: Interdependencia positiva.*

Para Coll y Colomina⁴⁵ (1990), el factor clave de la organización social de las actividades de aprendizaje en el aula, es la interdependencia de los alumnos participantes en una tarea o en la consecución de un objetivo, de ahí se desprenden tres tipos de estructura de meta: cooperativas, competitiva e individualista.

Vigostky manifiesta que el aprendizaje cooperativo requiere de grupos de estudios y trabajo. En primera instancia, porque es en el trabajo en grupo donde los docentes y los alumnos pueden cooperar con los menos favorecidos en su desarrollo cognitivo, tener acceso al conocimiento o mejorar sus aprendizajes.

En síntesis, y tal como sostienen los autores mencionados, las estrategias de aprendizaje cooperativo promueven el desarrollo de todos los alumnos en diferentes planos (cognoscitivo, social y afectivo), por lo cual son una herramienta muy valiosa en el trabajo cotidiano en las salas de clases.

3.6. El uso del computador en la enseñanza de la matemática

La necesidad de introducir la tecnología a la educación se debe a la demanda de la sociedad actual y las necesidades de los miembros de ésta, además, históricamente se ha tenido una gran expectativa con respecto a la tecnología como generadora de instrumentos que potencian la atención y ejecución de los estudiantes, sin olvidar la importancia que el Aprendizaje Mediado tiene para el conocimiento; y finalmente los sujetos en quienes se pueden probar y aprovechar estos recursos son los niños debido a la relación señalada entre aprendizaje y desarrollo, así como por su crecimiento intelectual.

Una de las características principales de la computadora, es su grado de plasticidad como herramienta de búsqueda, organización y transmisión de grandes cantidades información, proceso considerado como clave para el acceso al conocimiento y a su producción. Lo anterior la convierte en un medio ideal para abordar la complejidad en aumento del conocimiento actual, a través de la enseñanza de la ciencia y la tecnología, posibilitando al alumno el desarrollo de habilidades básicas para su uso.

En el ámbito de la integración de la tecnología a la educación se ha encontrado que en la actualidad el uso del computador ha cobrado un auge significativo, razón por la cual Crook (1998) señala que existen dos aspectos del pensamiento constructivista que son relevantes para la integración de las computadoras en el contexto social del aprendizaje; uno de ellos se refiere a la visión del aprendizaje centrada en el alumno y el segundo hace referencia a la aplicación de la metáfora de una especie de herramienta para pensar.

La didáctica contemporánea al enfatizar la necesidad de la participación activa del sujeto que aprende durante el proceso de enseñanza-aprendizaje hace hincapié en la actividad del mismo con otros, así como con el contenido de enseñanza.

La incorporación de las *Nuevas Tecnologías de Comunicación* como una de las características más recientes de la innovación en la educación actual implica una adaptación e integración de nuevos modelos pedagógicos. Cabero⁴⁸ (1998) confirma esta idea cuando nos propone nuevos cambios de papeles en el profesorado, al diseñar situaciones de aprendizaje que deben de asumir algunos principios como: estar basados en la participación y la responsabilidad directa del alumno en su propio proceso de formación, favorecer el diseño de modelos de trabajos independientes y autónomos, permitir formas de presentación de la información adaptada a las necesidades y características particulares de cada receptor, favorecer por los medios la interacción entre usuarios junto a la interacción con los medios, asumir como valor significativo una perspectiva procesal de la enseñanza por encima de una perspectiva centrada exclusivamente en los productos que se alcancen, y concederle la máxima significación a los contextos y ambientes donde el aprendizaje se produce.

De Corte, Greer & Verschaffel⁴⁹, (1996) afirma:

“El uso del computador, procura de lograr una construcción cooperativa mediada por el profesor, de conocimiento significativo y útil, incluyendo habilidades de solución de problemas basadas en uso de modelos matemáticos en situaciones y contextos auténticas de la vida real”.

La integración de la tecnología, facilita el tránsito de lo concreto a lo abstracto, a la reflexión sobre el mismo pensamiento y a la posibilidad de recreación de los conceptos.

Entender el aprendizaje de la matemática desde los paradigmas interactivos e integradores es concebir a un estudiante activo, constructor responsable de su conocimiento, el que sintetiza dialécticamente en relaciones de colaboración con el grupo escolar, familiar y social. Bajo este fundamento, se propone que el Sistema de Ambientes de Aprendizaje Integrador de la Matemática por Proyectos pueda servir de andamiaje en la reflexión y transformación de la práctica diaria del profesor en el aula y en el desarrollo de habilidades de pensamiento, actitudinales y motivacionales del alumno que le permitan un aprendizaje recreativo y significativo. Este supuesto está por probarse y se espera que próximamente se pueda ofrecer la documentación que lo verifique; por ahora queda abierta la invitación a profesores e investigadores a involucrarse en el proyecto y a continuar trabajando en la continua búsqueda de propuestas por mejorar la enseñanza de la matemática.

A diferencia de los medios didácticos tradicionales, la computadora y las telecomunicaciones plantean una forma de aproximación a la información y al conocimiento basada en la exploración activa y la interacción entre el alumno y el objeto por aprender. Forma de aproximación, acorde con los métodos activos de enseñanza – aprendizaje.

Dadas las formas de aproximación a la información y al conocimiento antes enunciadas, un modelo pedagógico de introducción de nuevas tecnologías en la escuela puede ser articulado a partir de las posibilidades que estas ofrecen en apoyo a los procesos de enseñanza – aprendizaje basados en la interacción del alumno con el objeto

de conocimiento, a través del desarrollo de habilidades, tanto en su dimensión de construcción individual como social.

4- EL PROYECTO

4.1 En qué consiste

La investigación pretendió situar a los estudiantes del sexto año básico, en un ambiente distinto de aprendizaje, donde los alumnos fueron los protagonistas. Se desarrollaron las unidades didácticas del plan de estudio a través de la resolución de problemas y el uso de páginas Web, como medios de enseñanza.

Las actividades las desarrollaron en grupos de 3 alumnos, cada uno con un líder. Se utilizaron la sala de clases y el laboratorio de Computación. En el laboratorio los alumnos resolvieron problemas propuestos por el profesor y en la sala de clases, los alumnos crearon los problemas, aplicando los contenidos.

4.2 Metodología

Durante dos meses, semanalmente se trabajó 3 horas en el laboratorio de computación y 3 en sala de clases.

Actividades que realizaron en la sala de clases:

- Revisaron su guía de trabajo (Ver anexo 1 en Pág.128)
- Revisaron y corrigieron errores de los problemas realizados en el laboratorio.
- Revisaron las estrategias usadas para resolverlos.
- Crearon situaciones problemáticas de la vida cotidiana, usando el contenido tratado.
- Intercambiaron las situaciones problemáticas con los otros grupos.
- Resolvieron problemas creados por los otros grupos.
- Expusieron los problemas al resto del curso, explicando la estrategia usada y la solución.
- Completaron la bitácora personal y grupal.

Actividades que realizaron los alumnos en el laboratorio (Ver anexo 2 en Pág 128.).

- Creación de su carpeta de trabajo (Primera clase)
- Apertura de la carpeta de trabajo
- Lectura de la situación problemática planteada
- Navegación en Internet e interacción con las páginas Web en forma colaborativa.
- Resolución de las situaciones problemáticas planteadas por el profesor
- Impresión y grabación en cada archivo del alumno
- Envío de archivo vía correo electrónico a la profesora.

Contenidos del plan de estudio

Los contenidos del plan de estudio se desarrollaron a través de situaciones problemáticas y actividades interactivas con sitios Web.

Formación de grupos

La muestra se distribuyó al azar en 6 grupos de tres integrantes cada uno. Cada grupo tuvo un líder, elegido por ellos. Dentro de sus funciones tuvo la responsabilidad de coordinar, moderar la participación colaborativa de sus compañeros y completar la bitácora grupal.

Profesor

El rol del profesor fue de facilitador, mediador de los procesos de aprendizaje, atendiendo las consultas y dudas.

Funciones:

- Seleccionar las Páginas Web que utilizaron los alumnos
- Preparar las guías y guardarlas en torno de red en las carpetas de trabajo.
- Apoyar el desempeño de cada grupo, aclarando dudas, respondiendo consultas y estimulando sus avances.
- Registrar los avances grupales y personales

Temas y Páginas Web que se trabajaron: (Ver anexo 4 en Pág 129.)

Tema 1. Potencias

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/1y2_eso/Potencias_y_raices/Potencias0.htm

Sitios complementarios de apoyo

<http://www.step.es/personales/jms/potenciasdiez/0.htm>

<http://www.sectormatematica.cl/basica/poten.htm>

<http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/Potencias/POTENCIAS.htm>

Tema 2. Fracciones

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/3_eso/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_indice.htm

Sitios complementarios de apoyo

<http://www.conevyt.org.mx/actividades/fracciones/index.html>

<http://sec21.ilce.edu.mx/matematicas/calculadoras/fracciones-comunes.html>

<http://www.escolar.com/matem/08fracc.htm>

Tema 3: Operaciones en Fracciones

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_2.htm

Sitios complementarios de apoyo

<http://ponce.inter.edu/cremc/ejfraccion.html>

<http://www.nuevaalejandria.com/archivos-curriculares/matematicas/nota-019.htm>

Tema 4. Decimales

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_4.htm

Sitio complementario de apoyo

<http://www.escolar.com/matem/10decima.htm>

Tema 5. Porcentajes

http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Porcentajes_e_indices/porcentaje.htm

Sitio Complementario de apoyo

http://www.conevyt.org.mx/recursos_multimedia/porcentajes/porcentajes1.swf

Tema 6. Razones y Proporciones

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/1y2_eso/Funciones_funcion_de_proporcionalidad/Proporcion.htm

Sitios complementarios de apoyo

<http://www.sectormatematica.cl/basica/relprop1.htm>

<http://www.conevyt.org.mx/cursos/razonesyproporciones/curso.htm>

Evaluación

Cada alumno evaluó su avance y desempeño en una bitácora personal que debía entregar semanalmente.

4.3 Hipótesis

H 1 La actitud de los alumnos de NB6 en la asignatura de matemática varía positivamente con la integración de la tecnología y la resolución de problemas en comparación con la enseñanza tradicional.

H 0 La actitud de los alumnos de NB6 en la asignatura de matemática no varía positivamente con la integración de la tecnología y la resolución de problemas en comparación con la enseñanza tradicional.

H 2 El rendimiento de los alumnos de NB6 en la asignatura de matemática varía positivamente con la integración de la tecnología y la resolución de problemas en comparación con la enseñanza tradicional.

H 0 El rendimiento de los alumnos de NB6 en la asignatura de matemática no varía positivamente con la integración de la tecnología y la resolución de problemas en comparación con la enseñanza tradicional.

4.4 Variables

Variables Dependientes

Actitud

Definición Conceptual: “Es una predisposición estable hacia,... cuyo componente fundamental es afectivo. Es evidente que las actitudes poseen además un componente cognitivo (que implica saber algo de...) y un componente comportamental o práctico (se desarrollan por la práctica)”.

Actitud

Definición operacional: Es la predisposición del alumno hacia la matemática, que se manifiesta en:

- El sentimiento de capacidad o incapacidad cuando es parte de una tarea o actividad.
- La confianza o la ansiedad sentida cuando resuelve un problema.
- La motivación, el interés o la frustración que presenta al desarrollar las actividades.
- La utilidad que le otorga a la matemática en su vida actual y futura.

Rendimiento

Definición Conceptual

Páez (1987) señala que el rendimiento académico es el grado en que cada estudiante ha alcanzado los objetivos propuestos y las condiciones bajo las cuales se produjo ese logro.

Rendimiento

Definición Operacional

Es el nivel de logro de los objetivos esperados, obtenido en la aplicación de instrumentos pre test - post test.

Las notas obtenidas de 1 a 7 en las evaluaciones realizadas por la profesora de matemática.

Variables Independientes

Integración de la tecnología

Definición conceptual; Sánchez, (1991, en Beltrán y Bueno 1997) señala que estos medios “son recursos al servicio de la enseñanza y que con una finalidad de apoyo se incorporan en el proceso de aprendizaje para que cada alumno alcance el límite superior de sus capacidades y potenciar así su aprendizaje”.

Integración de la tecnología

Definición operacional para efectos de esta investigación la integración de tecnología la definiremos como el uso de Páginas Web, principalmente corresponden al **proyecto Descartes**, que es el resultado de muchos años de experiencia en la creación y utilización de materiales para el uso de las tecnologías de la información en la enseñanza, promovido y financiado por el Centro nacional de información y comunicación educativa del Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España.

Descartes es un applet (programa en lenguaje Java que se caracterizan porque se puede insertar en las páginas Web), diseñado para presentar interacciones educativas con números, funciones y gráficas.

Tiene como principal finalidad la innovación en un entorno de colaboración en el área de Matemáticas, que utilice las ventajas del ordenador y de Internet para ofrecer a los profesores y a los alumnos una **nueva forma de enfocar el aprendizaje** de las Matemáticas, que promueva nuevas metodologías de trabajo en el aula más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además se utilizaron páginas interactivas complementarias.

Resolución de Problema

Definición Conceptual

Miguel de Guzmán, catedrático de análisis matemático de la Universidad Complutense de Madrid, lo define como: “una situación que cumple con ciertas condiciones para diferenciarse de un ejercicio; en el problema una de las condiciones es, que quien se enfrenta al problema no conoce el camino, ni medios para llegar a su resolución, esta última se daría por medio de un proceso que se inicia con la motivación, y posteriormente con la reflexión, la creación de estrategias posibles, aplicación y verificación”.

Resolución de Problema

Definición Operacional

Dar respuesta a situaciones problemáticas reales a través de la comprensión de conceptos matemáticos, elaboración de estrategias de resolución, selección de información, precisión de cálculo y verificación de los resultados.

4.5 Diseño

Corresponde a un diseño cuasi-experimental, con un grupo experimental y un grupo de control a los que se aplicó instrumentos como el pre test y un post test.

4.6 Muestra

La muestra corresponde a 36 alumnos de un Colegio Particular de Santiago, 18 forman el grupo experimental y 18 el grupo control, ambos pertenecientes a NB6 de la Educación General Básica. La edad, y el nivel socioeconómico se han considerado como variables controladas, ya que es similar en todos los sujetos.

Forma de trabajo

Se intervino al grupo experimental, desarrollando los contenidos del plan de estudio a través de la integración de la Tecnología y la Resolución de problemas. El grupo control siguió con clases tradicionales. Ambos cursos con la misma profesora.

4.7 Instrumentos de Medición

- Escala Fennema-Sherman de actitudes hacia la matemática. (Ver anexo 6 en Pág.)
- Test de rendimiento (Ver anexo 7 en Pág.)

4.7.1 . Descripción de la Escala Fennema-Sherman de actitudes hacia la matemática

Luego de revisar varios instrumentos se seleccionó la escala de Fennema- Sherman de actitud hacia la matemática.

Las razones fueron son las siguientes:

- Contenía las dimensiones de actitud que eran de interés para esta tesis, Confianza, Utilidad, Ansiedad y Motivación. (No se consideraron actitudes de los maestro, actitudes de los padres, actitud por sexo, que componen el documento original, por no responder a las necesidades del estudio).
- Tiene índices de alta confiabilidad, avalado por sus autores y otros investigadores en Estados Unidos y otros países.
- Ha sido utilizado en otros estudios que miden la variable actitud, en diferentes niveles escolares.

Descripción del instrumento

Contiene 48 enunciados, divididos en 4 sub-escalas cuyos títulos son:

Confianza hacia el aprendizaje de matemática, Utilidad de la matemática, Interés por el estudio de la matemática y Motivación hacia el estudio de la matemática. Cada subescala consiste en 6 enunciados positivos y seis negativos, haciendo un total de 12. La escala es de cinco (5) alternativas con valores de 5 puntos hasta uno (1). En la corrección de los resultados se consideró la direccionalidad de los mismos, por lo que el valor cinco (5) fue asignado a la alternativa que reflejaba una actitud positiva hacia la matemática.

La escala tiene un valor de 60 puntos por cada sub-escala lo que hace un total de 300 puntos. (ver anexo 5).

4.7.2 Test de rendimiento

Características Test de Rendimiento

El test se centró principalmente en la aplicación de conocimientos a situaciones reales.

Preguntas

Contiene 27 preguntas (situaciones problemáticas), que abordaron temas relacionados con potencias, racionales, decimales, razones y proporciones y porcentajes. 24 de selección múltiple de cuatro alternativas cada una y 3 de desarrollo o abiertas.

Preguntas de Selección múltiple: requieren que el alumno elija una respuesta entre cuatro opciones. Estas preguntas permiten obtener información sobre los conocimientos y habilidades de los alumnos que responden correctamente, y sobre los posibles errores cometidos por quienes eligen las opciones incorrectas.

Preguntas de Desarrollo o abiertas: requieren que el alumno elabore su propia respuesta. Se contestan directamente en la prueba.

Preguntas de selección múltiple se contestan en una Hoja de respuestas que están incluidas en cada prueba.

¿Qué se evaluará?

Se evaluará la capacidad de los alumnos para resolver problemas que requieren seleccionar información relevante, identificar variables, construir una estrategia de resolución y justificar su uso, escoger modelos matemáticos adecuados para aplicarlos según la situación, evaluar los resultados y juzgar la plausibilidad y pertinencia de las soluciones.

Tabla 1. Aprendizajes esperados y las preguntas respectivas en el anexo 7

Aprendizaje esperados	Preguntas
Resuelven problemas de proporcionalidad planteados en contextos numéricos, aplicando adecuadamente el cociente constante o el producto constante según corresponda.	2- 5 - 12- 13- 15- 17- 18- 21-22
Resuelven problemas que implican cálculos sucesivos de porcentajes, aplicando propiedades de la multiplicación. Encuentran el referente inicial a partir de una cantidad que incluye un porcentaje	8- 11- 14- 16-27
Interpretan gráficos de situaciones diversas e identifica tipo de relación que se establece entre dos variables, relacionándolas con la variación proporcional.	3- 4 -
Utilizan la escritura de potencias para realizar operaciones aritméticas con grandes y/o pequeñas cantidades en el contexto de la resolución de problemas	19- 26 - 23
Resolución de problemas en los que sea necesario y pertinente expresar como fracciones números decimales finitos o e infinitos periódicos.	1-9 – 7 – 10 –24 20
Resolución de problemas de números naturales aplicando operatoria.	6- 24

5. ANÁLISIS DE DATOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la investigación.

Comparación entre el Pre Test Actitud del G. Control y Pre Test Actitud del G. Experimental.

La tabla 2 muestra la comparación de medidas de tendencia central del pre-test de la variable actitud. El grupo control obtuvo una media de 152.1 con una desviación estándar de 24.2 y el grupo experimental obtuvo una media de 153.8 con una desviación estándar de 22.9 de un total de 300 puntos.

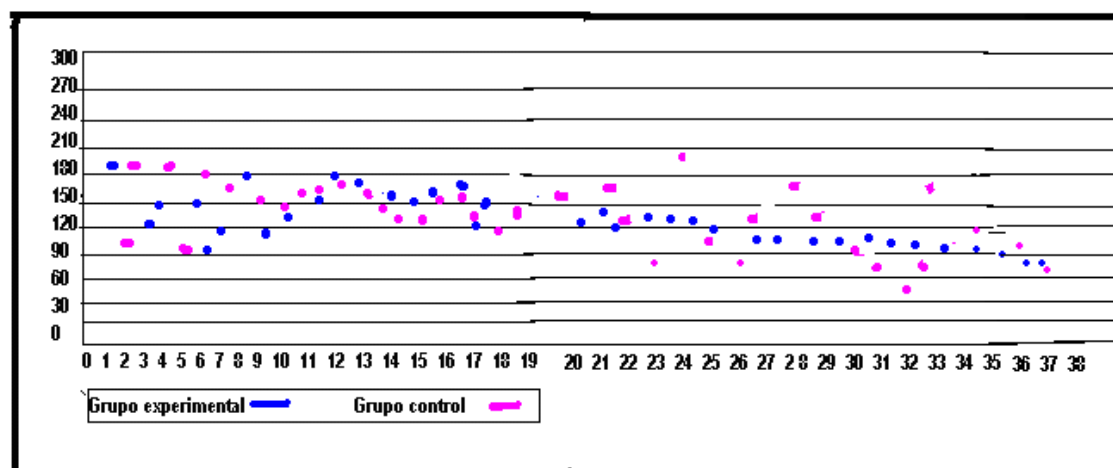
Tabla 2. Comparación de Medidas de Tendencia Central Pre Test Actitud

Medidas	Grupo control	Grupo experimental
Media	152,1	153,8
Mediana	154	156,0
Moda	140,164	119,151,180
Desv.estandar	24,2	22,9
Varianza	587,2	527,6
Rango	85	72

V.Min.	105	118
V.Max.	190	190
n	37	37

El gráfico 1 muestra los puntajes del grupo control y el grupo experimental. El 50 % de los individuos está sobre 150 puntos. La mayor dispersión de datos se observa en el grupo control.

Gráfico 1. Dispersión de puntajes Pre test Actitud G. Control y G. Experimental



Al aplicar la prueba t se obtuvo:

$$t = 0.2$$

$$g l = 38$$

$$p = 0.05$$

No existe diferencia significativa entre el grupo experimental y el grupo control, por lo tanto, al inicio de la experiencia ambos grupos presentaban un nivel similar de actitud hacia la matemática.

Comparación entre los Post Test Actitud del grupo Control y Post Test Actitud del grupo Experimental

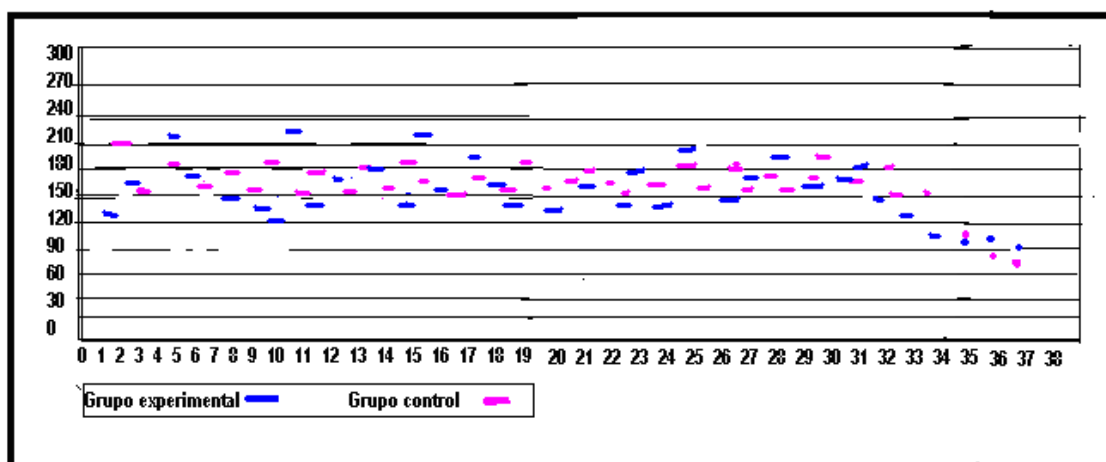
La tabla 3 muestra la comparación de medidas de tendencia central del post test de la variable actitud. El grupo control obtuvo una media de 153.1 con una desviación estándar de 20.5 y el grupo experimental obtuvo una Media de 193.3 con una desviación estándar de 24.2 de un total de 300 puntos.

Tabla 3 Comparación de Medidas de Tendencia Central Post Test Actitud

Medidas	Grupo Control	Grupo Experimental
Media	153,1	1 193,3
Mediana	1 54	1 199,5
Moda	154	1 190,200,224
Desv.estandar	20,5	24,2
Varianza	422,3	589,8
Rango	80	74
V.Min.	120	130
V.Max.	200	204
n	37	37

El 50 % de los individuos del grupo control se ubica en las puntuaciones sobre 154 puntos, en cambio, en el grupo experimental el 50 % se ubica sobre 193 puntos. El gráfico 2 muestra la dispersión de datos de ambos grupos, siendo mayor en el Grupo Control.

Gráfico 2 Dispersión de puntajes Post test Actitud G. Control y G. Experimental



Al aplicar la prueba t se obtuvo:

$$t = 3.1$$

$$g l = 38$$

$$p = 0.05$$

Por lo tanto, existe diferencia significativa entre los resultados. La actitud de los alumnos varió positivamente hacia la matemática.

Comparación entre el Pre Test y Post Test de Actitud del Grupo Experimental

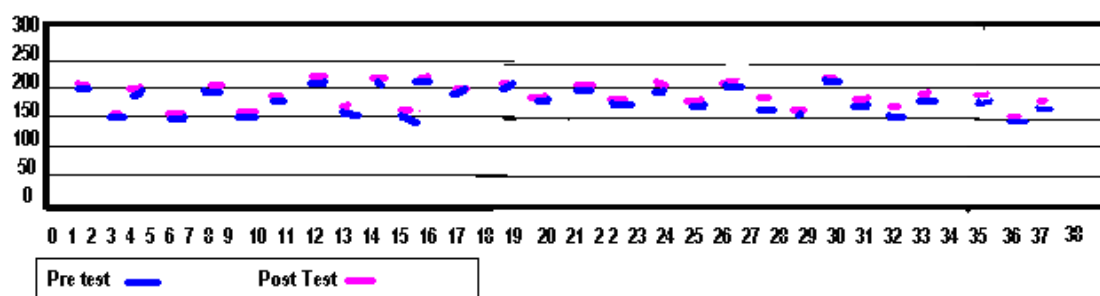
La tabla 4 muestra las medidas de tendencia central obtenidas por ambos grupos. El grupo experimental arrojó una media cuyo valor fue de 153.8 con una desviación estándar de 22.9 y en el Post Test 193.3 con una desviación estándar de 24.2 de un puntaje total de 300 puntos.

Tabla 4. Pre Test y Post Test Actitud del Grupo Experimental

Medidas	Grupo experimental Pre-test	Grupo experim. Post test
Media	153,8	193,3
Mediana	156,0	199,5
Moda	119,151,180	190,200,224
Desv.estandar	22,9	24,2
Varianza	527,6	589,8
Rango	72	74
V.Min.	118	130
V.Max.	190	204
n	37	37

El gráfico 3 muestra la dispersión de puntajes del Pre test y Post test de Actitud del grupo experimental

Gráfico 3. Pre Test y Post Test Actitud G. Experimental



Al aplicar la prueba t se obtuvo:

$$t = 3.5$$

$$g l = 34$$

$$p = 0.05$$

Se acepta la hipótesis 1 y se rechaza la hipótesis nula. La actitud de los alumnos de sexto año básico en la asignatura de matemática varía positivamente con la integración de la tecnología y la resolución de problemas en comparación con la enseñanza tradicional.

Variable Rendimiento Grupo Experimental Comparación Rendimiento entre Pre Test del grupo Experimental y Pre Test del Grupo Control.

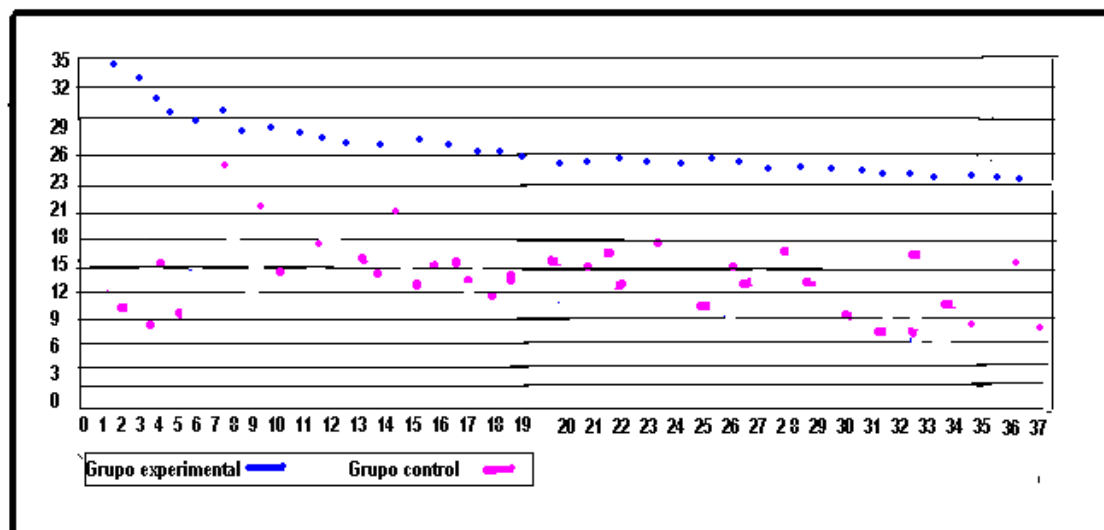
La tabla 5 muestra las medidas de tendencia central obtenidas por ambos grupos. Al comparar los datos, el grupo control obtuvo una media de 14.5 con una desviación estándar de 3.2 y el grupo experimental obtuvo una media de 13.8 con una desviación estándar de 3.9 de un total de 27 puntos.

Tabla 5. Pre Test Rendimiento G. Control y G. Experimental.

Medidas	Grupo Control	Grupo Experimental
Media	14,5	17,8
Mediana	16	19
Moda	16	19
Desv.estandar	3,2	4,9
Varianza	10,2	11,0
Rango	12	12
V.Min.	7	6
V.Max.	19	18
Error	0.7	0,7
n	37	37

La media del grupo control es más baja que el grupo experimental, las desviaciones estándar son diferentes, y hubo mayor dispersión de datos en el grupo control.

Gráfico 4. Dispersión de datos Pre Test Rendimiento Grupo Experimental y Grupo Control



Al aplicar la prueba t se obtuvo:

$t = 2,7$

$g l = 34$

$p = 0.05$

Existe diferencia significativa entre los grupos, por lo tanto, al inicio de la experiencia ambos grupos presentan un rendimiento similar.

Comparación de Post Test Rendimiento Grupo Experimental y Post Test Grupo Control

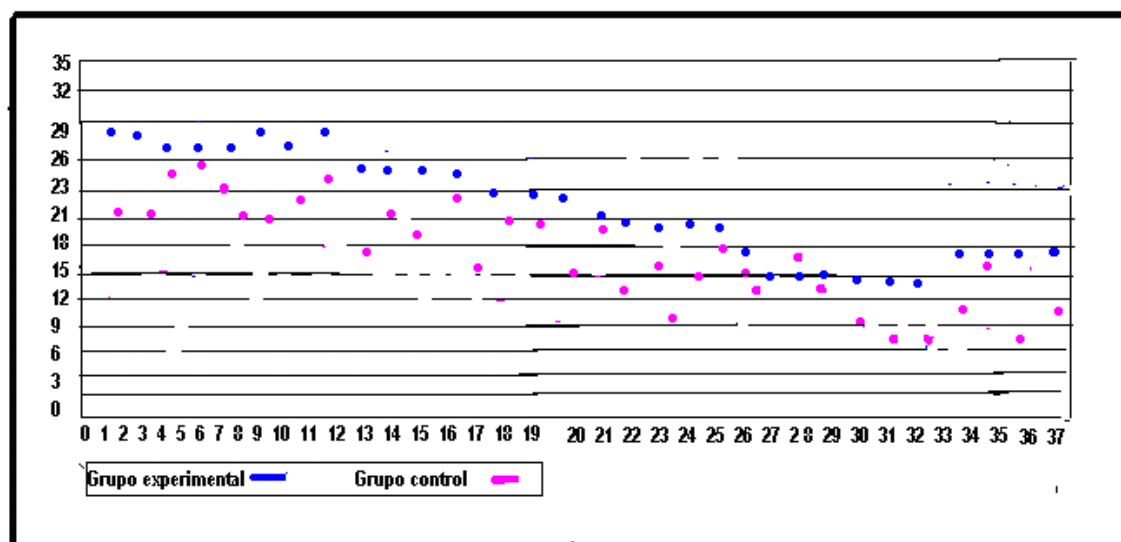
La tabla 6 muestra las medidas de tendencia central obtenidas por ambos grupos. Al comparar los post test, el Grupo Control obtuvo una media de 19.22 con una desviación estándar de 3.9 de un total de 24 puntos y el grupo experimental obtuvo una Media de 28.27 con una desviación estándar de 5.6 de un total de 35 puntos.

Tabla 6. Post Test Rendimiento G. Control y G. Experimental

Medidas	Grupo Control	Grupo Experimental
Media	19,22	28,27
Mediana	19	29,0
Moda	19	29.0
Desv.estandar	3,9	5,6
Varianza	15,3	23,9
Rango	15	18
V.Min.	11	8
V.Max.	21	30
Error	0.9	1,1
n	37	37

En el grupo de control, el puntaje máximo fue de 26 puntos en tanto que en el grupo experimental el puntaje máximo fue de 35 puntos y además hubo mayor dispersión de datos en el grupo experimental.

Gráfico 5. Dispersión de puntajes Post Test Rendimiento G. Control y G. Experimental



Al aplicar la prueba t se obtuvo:

$$t = 2.02$$

$$g l = 34$$

$$p = 0.05$$

Hubo diferencia significativa de rendimiento entre los grupos.

Comparación de Pre Test y Post Test Rendimiento Grupo Experimental

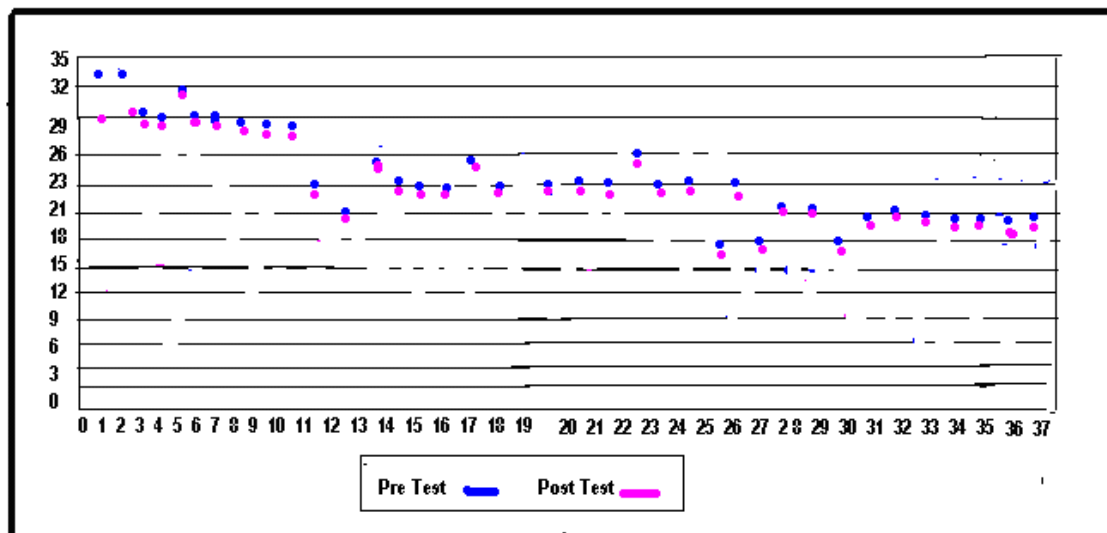
En la tabla 7 se observa que el grupo Experimental en el Pre Test de Rendimiento obtuvo una media de 13.8 con una desviación estándar de 3.3 de un total de 27 puntos y en el Post Test obtuvo una Media de 19.27 con una desviación estándar 3.6 de un total de 30 puntos.

Tasbla 7. Pre Test y Post test grupo midiendo rendimiento

Medidas	Grupo experim. Pre- test	Grupo Experim. Post test
Media	17,8	28,27
Mediana	19	29,0
Moda	19	29.0
Desv.estandar	4,9	5,6
Varianza	11,0	23,9
Rango	12	18
V.Min.	6	8
V.Max.	18	30
Error	0,7	1,1
n	37	37

El gráfico 6 muestra mayor dispersión de datos en el Post test.

Grafico 6. Dispersión de puntajes Pre Test y Post Test Rendimiento Grupo Experimental



Al aplicar la prueba t se obtiene:

$$t = 3.7$$

$$g l = 38$$

$$p = 0.05$$

Por lo tanto, existe diferencia significativa. La experiencia tuvo un efecto en el rendimiento.

En el contexto de la investigación se acepta la hipótesis h1. El rendimiento de los alumnos de sexto año básico varía con la integración de la tecnología y la resolución de problemas como escenario de aprendizaje.

Análisis Coeficiente de Correlación de Pearson

La tabla 8 muestra la correlación entre actitud y rendimiento. Se obtiene un valor r de 0.92 $p < .01$, es decir, se obtuvo una correlación positiva significativa.

Tabla 8. Correlación entre Actitud y Rendimiento

Varfiables	Promedio	Desviación Estándar	Correlación r
Actitud	193,3	24,2	
Rendiimiento	28,27	5,6	

* $p < .01$

Notas Finales del grupo experimental

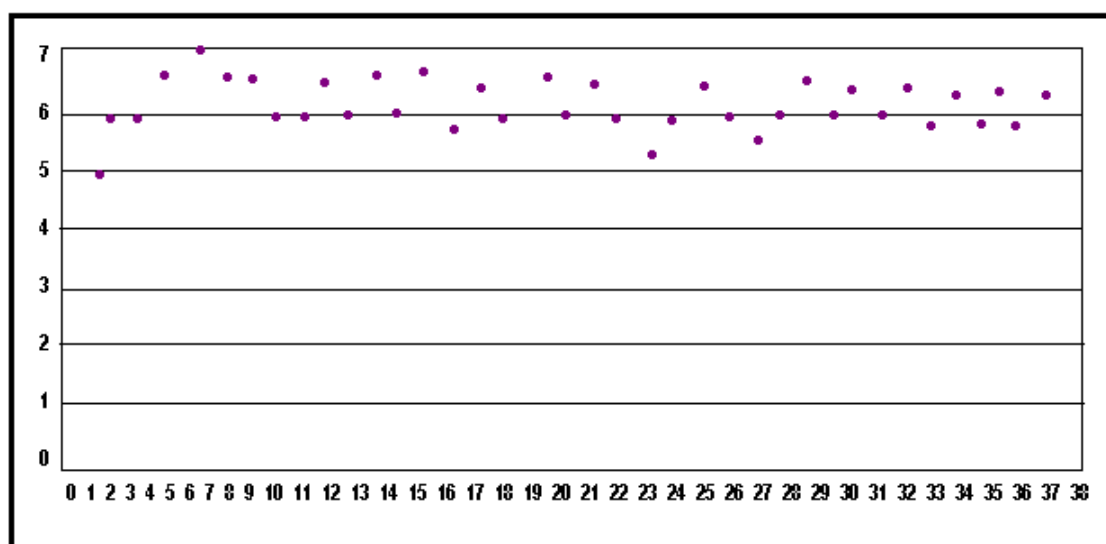
La tabla 9 muestra las medidas de tendencia central obtenidas de los promedios finales del grupo experimental, en ella se observa una media de 5.4 con una desviación estándar de 0.93 de un total de 18 alumnos. La mediana fue 5.7, lo que significa que el 50% de los alumnos están situados por encima de este valor.

Tabla 9. Promedios Notas Promedio Finales

Media	6,3
Mediana	6.5
Moda	6.5
Desv.estandar	0.93
Varianza	0.96
Rango	3,2
V.Min.	3,5
V.Max.	6,7
Error	0.2
n	37

El gráfico 7 muestra la dispersión de notas en la asignatura de Matemáticas del grupo experimental.

Gráfico 7. Dispersión Promedio de Notas finales



6. CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo demostraron que la integración de la tecnología y la resolución de problemas tuvieron un efecto positivo en la actitud de los alumnos, variando positivamente y que también hubo un efecto positivo en el rendimiento académico de los alumnos.

A través de esta experiencia se confirma, que las creencias y las actitudes pueden variar en los alumnos, por consiguiente, su disposición dentro del aula.

Además se comprobó, que existe una correlación positiva débil entre la variable Actitud y Rendimiento

Con respecto a la participación, la metodología usada permitió centrar en el alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje, convirtiéndolos en sujetos más activos.

El uso de problemas creados por ellos mismos permitió tomar decisiones, involucrarse y activar conocimientos, habilidades y competencias de mayor relevancia, que cuando trabajaron con problemas definidos por el profesor.

Los alumnos fueron capaces de resolver situaciones problemáticas nuevas con confianza y seguridad, buscando alternativas de solución, desarrollando una técnica propia y particular, que les permitió inferir y abstraer en situaciones que así lo requerían.

La interactividad con la página Web les dio la posibilidad de dirigir su propio proceso de aprendizaje, buscando y aplicando las estrategias de acuerdo a las tareas que debían realizar.

Los resultados son coherentes con la literatura, respecto al uso de resolución de problemas y la incorporación de las tecnologías como estrategias para que el alumno desarrolle procesos de pensamiento.

Se pudo comprobar que los estudiantes que tenían manejo en estrategias generales de resolución de problemas y además manejo en estrategias metacognitivas para resolver problemas, obtuvieron un importante rendimiento en sus calificaciones en matemáticas respecto al grupo de control que adolecía del uso de estas herramientas de aprendizaje.

6.1 Logros

Producto del trabajo cooperativo los alumnos mejoraron la autoestima y su valoración del otro, la tolerancia, el respeto por la opinión del compañero, la empatía y el trabajo en equipo.

Los alumnos descubrieron la utilidad de las matemáticas, aplicando los contenidos en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

La metodología utilizada despertó el interés y la disposición hacia la asignatura, convirtiéndolos en sujetos más activos.

Se destaca la autonomía en la organización del grupo, la oportunidad que tuvieron los alumnos de intercambiar ideas y confrontar opiniones.

La organización de los grupos a través de líderes fue un factor importantísimo en esta experiencia, permitiendo un aprendizaje entre pares.

El uso de bitácoras personales y grupales, les permitió evaluar sus procesos, desempeños y avances, tomando conocimiento de su propio aprendizaje.

7. BIBLIOGRAFÍA

- AGUILERA, A. (1997). Evaluación de las habilidades de pensamiento en situaciones de interacción social. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- ALONSO, V., GONZÁLEZ, A. y SÁENZ, O. (1988). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo medio de EGB. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(3), pp. 251-264.
- AUGUSTINE, D., K. GRUBER Y L. HANSON (1990), "Cooperation works", en *Educational Leadership*, Vol. 4 núm. 7.
- AUSUBEL-NOVAK-HANESIAN (1983) *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2º Ed. Trillas México
- BERISTÁIN MÁRQUEZ Eloísa, Yolanda CAMPOS CAMPOS y César BLACKER, EMMA. Nuevo sistema de aprendizaje para la matemática [en línea] Instituto Educativo para el Desarrollo Intelectual y Cultural - INEDIC. <http://www.sectormatematica.cl/Educmatem/nuevosist.htm#sistema> [consulta 19 Enero 2005]
- CABERO, J. (1998): Las aportaciones de las nuevas tecnologías a las instituciones de formación continuas: reflexiones para comenzar el debate, en Departamento De Didáctica Y Organización Escolar Universidad Complutense-Uned: Las organizaciones ante los retos del siglo XXI, 1143-1149. (ISBN: 84-600-9507-X).
- CASTELLS, MANUEL (1999, 2ª ed.) *La sociedad red La era de la información vol. I* Madrid. Alianza Editorial
- COLL, CÉSAR. (1990) "Significado y Sentido en el Aprendizaje Escolar. Reflexiones en torno al concepto de Aprendizaje significativo". En: *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Piados, México, (Piados Ecuador #92) pp.189-206.
- COLL, C. Y SOLÉ, I., (1990), "La interacción profesor-alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje" en Marchesi, Coll y Palacios (Compiladores), *Desarrollo psicológico y educación II. Psicología de la Educación*. Madrid: Alianza.
- CROOK, CH. (1998). *Ordenadores y aprendizaje colaborativo*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura y Ediciones Morata.
- DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación, en Beltrán, J. A., Bermejo, V. Prieto, M. D. y Vence, D. *Intervención psicopedagógica*, pp. 146-168. Madrid: Pirámide.
- DE CORTE, ERIK Y VERSCHAFFEL, LIEVEN *Comunidades de aprendizaje de alta eficacia: las investigaciones de intervención Como medio de superar la división entre teoría y práctica*. Versión en español. [En línea] <http://www.ibe.unesco.org/International/Publications/Prospects/ProspectsPdf/124s/decs.pdf> [consultado 13 de Agosto 2004]
- DE CORTE, E., GREER, B., & VERSCHAFFEL, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.
- DE GUZMÁN, MIGUEL. (1993) *Tendencias Innovadoras En Educación Matemática*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. ISBN: 84-7884-092-3
- DE GUZMÁN, MIGUEL. (1997) *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. [En línea] <http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm> [consultado enero 2005]
- DÍAZ AGUADO, M. J. (1995), *Todos iguales, todos diferentes. Programas para favorecer la integración escolar: Manual de intervención*, t.2, Madrid, Once.
- FOSNOT, C.T. (ed.) (1996). *Constructivismo: teoría, perspectivas, y práctica*. Nueva York: Prensa De la Universidad De los Profesores.
- GARCÍA, R. (2000). *El conocimiento en construcción: de las formulaciones de Piaget a la teoría de sistemas complejos*. Barcelona: Gedisa.
- GAIRÍN, J. (1990) *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática*. Barcelona: Boixareu Universitaria.
- GÓMEZ-CHACÓN, I. (1997) *La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. nº 13
- GÓMEZ CHACÓN, I. (2000) *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.
- GONZÁLEZ, JULIO *Comprensión de problemas aritméticos: una comparación entre alumnos con y sin éxito en la resolución de problemas*. (Investigació n <http://copsa.cop.es/congresoiberoa/base/educati/et154.htm>)
- GREENO, J. G. (1991). A view of mathematical problem solving in school. In M. U. Smith (Ed.), *Toward a unified theory of problem solving. Views from the content domains* (pp. 69-98). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

- GUERRERO, E., BLANCO, L. J. y VICENTE, F. (2002) Trastornos emocionales ante la educación matemática. En García, J. N. (coord.), *Aplicaciones para la intervención psicopedagógica*. Madrid: Pirámide.
- HALMOS, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.
- HARGREAVES, A. (2003). Enseñar en la sociedad del conocimiento (La educación en la era de la inventiva). Barcelona. Octaedro, pp.244
- HOPENHAYN, MARTÍN. (2002). Educar para la sociedad de la información y de la comunicación: una perspectiva latinoamericana. *Revista Iberoamericana de Educación* (30):13,
- KILPATRICK, JEREMY (1987). What constructivism might be in mathematics education. En Bergeron, J. C., Herscovics, N. y Kieran, C. (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 1. (pp. 3-27). Montréal: Université de Montreal.
- KILPATRICK, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, pp1-16 Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- KILPATRICK, J. (1990), "Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la Matemática", en *Educación*, n.º 17, pp. 37-52.
- KILPATRICK, J. (1998). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (pp.1-15). Hillsdale NJ.
- LAMPERT, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
- LURÍA, A. R. y L. S. TSVETKOVA. (1981). La Resolución de problemas y sus trastornos. Fontanela.
- MARQUÈS GRAELLS, PERE. (2000) Nueva Cultura, Nuevas Competencias Para Los Ciudadanos. La Alfabetización Digital. Roles De Los Estudiantes Hoy. [En línea] <http://dewey.uab.es/pmarques/competen.htm> [consultado 26 de julio 2004] (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 1. (pp. 3-27). Montréal: Université de Montreal.
- KILPATRICK, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, pp1-16 Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- KILPATRICK, J. (1990), "Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la Matemática", en *Educación*, n.º 17, pp. 37-52.
- KILPATRICK, J. (1998). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (pp.1-15). Hillsdale NJ.
- LAMPERT, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
- LURÍA, A. R. y L. S. TSVETKOVA. (1981). La Resolución de problemas y sus trastornos. Fontanela.
- MARQUÈS GRAELLS, PERE. (2000) Nueva Cultura, Nuevas Competencias Para Los Ciudadanos. La Alfabetización Digital. Roles De Los Estudiantes Hoy. [En línea] <http://dewey.uab.es/pmarques/competen.htm> [consultado 26 de julio 2004].
- PUIG, LUIS (1990) La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas
- RESNICK, L.B. Y W.W. FORD. (1990). La Enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Paidós. MEC.
- SANTOS, LUZ MANUEL, "Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas", en: *Revista Educación Matemática*, Vol. 4, Nº 2, México D. F., Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., 1992. p. 22.
- SCHOENFELD, A.H. (1992) Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning* (334-370). New York: Mac Millan P.C.
- SOUTHWELL, B. (2000) Algunos factores en las matemáticas que aprenden y enseñanza. Congreso internacional sobre la educación de las matemáticas, Makuhari, Japón.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*. (pp. 99-137). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- VYGOTSKI, Lev (1994). "The Problem of Environment. En René Van der Verr y Jaan Valsiner" (Eds.): *The Vygotski Reader*. New York, Blackwell